

Capítulo udf

Substituição

replacement.1 Introdução

sth:replacement:intro:
sec

A Substituição é o esquema axiomático que distingue **ZF** de **Z**. Recorremos a ele ao longo de ??–??. Neste capítulo, abordaremos finalmente a questão: a Substituição está justificada?

Para tornar a questão precisa, convém observar que a Substituição é realmente bastante *forte*. Teremos uma ideia de quão forte é ao longo deste capítulo (e de novo na ??). Isto sugere que uma justificação é de fato necessária.

Discutiremos dois tipos de justificação. Em traços largos: uma justificação *extrínseca* é uma tentativa de justificar um axioma pelos seus frutos; uma justificação *intrínseca* é uma tentativa de justificar um axioma sugerindo que ele é vindicado pelos conceitos matemáticos em causa. Teremos uma ideia mais clara do que isto significa ao longo deste capítulo, mas não passa da ponta de um icebergue. Para mais pormenores, veja em particular Maddy (1988a e 1988b).

replacement.2 A Força da Substituição

sth:replacement:strength:
sec

Começamos com uma observação simples sobre a força da Substituição: a menos que ultrapassemos **Z**, não podemos provar a existência de qualquer ordinal de von Neumann maior ou igual a $\omega + \omega$.

Eis um esboço do porquê. Trabalhando em **ZF**, consideremos o conjunto $V_{\omega+\omega}$. Este conjunto serve como domínio de um *modelo* para **Z**. Para ver isto, introduzimos alguma notação para a *relativização* de uma fórmula:

sth:replacement:strength:
formularelativization

Definição replacement.1. Para qualquer conjunto M , e qualquer fórmula φ , seja φ^M a fórmula que resulta de restringir todos os quantificadores de φ a M . Isto é, substituir “ $\exists x$ ” por “ $(\exists x \in M)$ ”, e substituir “ $\forall x$ ” por “ $(\forall x \in M)$ ”.

Pode mostrar-se que, para todo o axioma φ de **Z**, tem-se $\mathbf{ZF} \vdash \varphi^{V_{\omega+\omega}}$. Mas $\omega + \omega$ não está em $V_{\omega+\omega}$, por ??. Logo **Z** é consistente com a não existência de $\omega + \omega$.

Foi por isso que dissemos, na ??, que ?? não pode ser provado sem Substituição. Pois é fácil, dentro de $\mathbf{Z}$, definir uma boa ordenação explícita que intuitivamente *deveria* ter tipo de ordem $\omega + \omega$. De fato, demos um exemplo informal disto em ??, quando apresentamos a ordenação nos números naturais dada por:

$$n \leq m \text{ sse ou } n < m \text{ e } m - n \text{ é par,} \\ \text{ou } n \text{ é par e } m \text{ é ímpar.}$$

Mas se $\omega + \omega$ não existe, esta boa ordenação não é isomorfa a nenhum ordinal. Logo $\mathbf{Z}$ não prova ??.

Invertendo o prisma: a Substituição permite provar a existência de $\omega + \omega$, e portanto tem de permitir provar a existência de $V_{\omega+\omega}$. E não só. Para *qualquer* boa ordenação que possamos definir, ?? nos diz que existe algum α isomorfo com essa boa ordenação, e portanto que V_α existe. De forma direta, então, a Substituição garante que a hierarquia de conjuntos tem de ser *muito alta*.

Nas próximas partes do capítulo, e de novo em ??, teremos uma ideia mais clara de quão *alta* a Substituição força a hierarquia a ser. O ponto simples, por agora, é que a Substituição *precisa* mesmo de justificação!

replacement.3 Considerações Extrínsecas sobre a Substituição

Começamos por considerar uma tentativa *extrínseca* de justificar a Substituição. Boolos sugere uma, como segue.

sth:replacement:extrinsic:
sec

[...] a razão para adotar os axiomas da substituição é bastante simples: têm muitas consequências desejáveis e (aparentemente) nenhuma indesejável. Para além de teoremas sobre a concepção iterativa, as consequências incluem uma teoria satisfatória, embora não ideal, dos números infinitos, e um resultado altamente desejável que justifica definições indutivas em relações bem fundadas. (Boolos, 1971, 229)

A ideia central de Boolos é que devemos justificar a Substituição pelos seus frutos. E os frutos específicos que menciona são os que temos discutido nos últimos capítulos. A Substituição permitiu-nos provar que os ordinais de von Neumann eram excelentes sucedâneos da ideia de um tipo de boa ordenação (isto é a nossa “teoria satisfatória, embora não ideal, dos números infinitos”). A Substituição permitiu-nos também definir os V_α , estabelecer a noção de posto e provar a indução- $\in$ (isto corresponde aos nossos “teoremas sobre a concepção iterativa”). Por fim, a Substituição permite provar o teorema de recursão transfinita (isto são as “definições indutivas em relações bem fundadas”).

São, de fato, consequências desejáveis. Mas estas consequências desejáveis bastam para *justificar* a Substituição? *Não*. Ou pelo menos, não de forma direta.

Eis um problema simples. Embora tenhamos enunciado algumas consequências desejáveis da Substituição, muitas delas poderiam ter sido obtidas por outras vias. Isto não é tão conhecido como devia, pelo que convém explicar a situação.

Existe uma teoria simples de conjuntos, a Teoria dos Níveis, ou **LT** abreviadamente.¹ Os axiomas de **LT** são apenas Extensionalidade, Separação e a afirmação de que todo o conjunto é subconjunto de algum *nível*, onde “nível” é definido de modo astuto para que os níveis se comportem como os nossos amigos, os V_α . Logo **ZF** prova **LT**; mas **LT** é *muito* mais fraca que **ZF**. De fato, **LT** não dá Pares, Conjuntos potencia, Infinito nem Substituição. Seja **Zr** o resultado de acrescentar Infinito e Conjuntos potencia a **LT**; isto fornece também Pares, logo **Zr** é pelo menos tão forte quanto **Z**. Mas, de fato, **Zr** é estritamente mais forte que **Z**, pois acrescenta a afirmação de que todo o conjunto tem posto (daí a sugestão de o chamar **Zr**). De fato, **Zr** fornece: uma teoria perfeitamente satisfatória dos ordinais; resultados que estratificam a hierarquia em estágios bem ordenados; uma prova da indução- $\in$; e uma *versão* da recursão transfinita.

Em resumo: embora Boolos não soubesse disto, todas as consequências desejáveis que menciona poderiam ter sido obtidas *sem* Substituição; bastaria usar **Zr** em vez de **Z**.

(Diante disto, por que seguimos a rota convencional, ensinando-lhe **ZF** em vez de **LT** e **Zr**? Há duas razões. Primeiro: por razões puramente históricas, começar por **LT** é pouco standard; queríamos dotá-lo de ferramentas para ler discussões mais standard de teoria de conjuntos. Segundo: quando estiver preparado para apreciar **LT** e **Zr**, pode simplesmente ler [Potter 2004](#) e [Button 2021](#).)

Naturalmente, como **Zr** é estritamente mais fraca que **ZF**, há resultados que **ZF** prova e que **Zr** deixa em aberto. Logo alguém poderia tentar justificar a Substituição em bases extrínsecas apontando para um desses resultados. Mas, uma vez que saiba usar **Zr**, é bastante difícil encontrar muitos exemplos de coisas que (a) ficam decididas pela Substituição mas não de outro modo, e (b) são intuitivamente verdadeiras. (Para mais sobre isto, veja [Potter 2004](#), §13.2.)

A conclusão é esta. Para fornecer uma justificação extrínseca convincente da Substituição, seria preciso encontrar um resultado que *não* possa ser obtido sem Substituição. E isso não é empresa fácil.

Consideremos um problema adicional que surge para qualquer tentativa de oferecer uma justificação puramente extrínseca da Substituição. (Este problema é talvez mais fundamental que o primeiro.) Boolos não se limita a observar que a Substituição tem muitas consequências desejáveis. Afirma também que a Substituição “(aparentemente) não tem” consequências indesejáveis. Mas esta ressalva entre parênteses, “aparentemente”, é seguramente absolutamente crucial.

¹As primeiras versões de **LT** são apresentadas por [Montague \(1965\)](#) e [Scott \(1974\)](#); foi simplificada e recebeu tratamento de livro por [Potter \(2004\)](#); e [Button \(2021\)](#) simplificou recentemente ainda mais **LT**.

Relembre como chegamos aqui: a Compreensão ingênua encontrou inconsistência, e respondemos a essa inconsistência abraçando a concepção cumulativa-iterativa de conjunto. Esta concepção vem equipada com uma narrativa que, esperamos, nos assegura a sua consistência. Mas se não pudermos justificar a Substituição dentro dessa narrativa, então não temos (ainda) razão para crer que **ZF** é consistente. Ou melhor: não temos razão para crer que **ZF** é consistente, para além do fato (talvez meramente contingente) de que ninguém descobriu ainda uma contradição. Exatamente nesse sentido, o comentário de Boolos parece reduzir-se a isto: “(aparentemente) **ZF** é consistente”. Deveríamos exigir maior garantia de consistência do que isto.

Esta questão afecta qualquer tentativa *puremente* extrínseca de justificar a Substituição, isto é, qualquer justificação formulada unicamente em termos das consequências (conhecidas) de **ZF**. Como tal, convém procurar uma justificação *intrínseca* da Substituição, isto é, uma justificação que sugira que a narrativa que contamos sobre conjuntos de algum modo “já” nos compromete com a Substituição.

replacement.4 Limitação de Tamanho

Talvez a tentativa mais comum de oferecer uma justificação “intrínseca” da Substituição passe pela seguinte noção: sth:replacement:limofsize:sec

Limitação-de-tamanho. Quaisquer coisas formam um conjunto, desde que não haja demasiadas.

Este princípio vindicará de imediato a Substituição. Afinal, qualquer conjunto formado por Substituição não pode ser maior do que o conjunto a partir do qual foi formado. Enunciado com precisão: suponha que forma um conjunto $\tau[A] = \{\tau(x) : x \in A\}$ usando Substituição; então $\tau[A] \preceq A$; logo, se os membros de A não eram demasiado numerosos para formar um conjunto, as suas imagens não são demasiado numerosas para formar $\tau[A]$.

A dificuldade óbvia em invocar *Limitação-de-tamanho* para justificar a Substituição é que *ainda* não estabelecemos qualquer princípio como *Limitação-de-tamanho*. Além disso, quando contamos a nossa história sobre a concepção cumulativa-iterativa de conjunto em ??-??, nada *sugeri*u a direção de *Limitação-de-tamanho*. Isto é, de fato, precisamente a razão pela qual Boolos escreveu num dado momento: “Talvez se possa concluir que há pelo menos dois pensamentos ‘por detrás’ da teoria de conjuntos” (1989, p. 19). Por um lado, as ideias em torno da concepção cumulativa-iterativa de conjunto destinam-se a vindicar **Z**. Por outro, *Limitação-de-tamanho* visa vindicar a Substituição.

Mas a questão não é apenas termos estado até aqui *em silêncio* sobre *Limitação-de-tamanho*. Antes, a questão é que *Limitação-de-tamanho* (tal como acabamos de o formular) parece assentar mal com a noção cumulativa-iterativa de conjunto. Afinal, não menciona nada sobre a ideia de conjuntos formados em *estágios*.

Isto não surpreende muito, dada a história destes “dois pensamentos” (isto é, a concepção cumulativa-iterativa de conjunto, e *Limitação-de-tamanho*). Estes “dois pensamentos” acabam por ser dois projetos bastante diferentes para bloquear os paradoxos da teoria de conjuntos. A noção cumulativa-iterativa de conjunto bloqueia o paradoxo de Russell dizendo, em traços largos: *nunca deveríamos ter esperado que existisse um conjunto de Russell, porque não seria “formado” em nenhum estágio*. Por contraste, *Limitação-de-tamanho* visa excluir o conjunto de Russell, dizendo, em traços largos: *nunca deveríamos ter esperado que existisse um conjunto de Russell, porque seria demasiado grande*.

Posto assim, sejamos diretos: considerada como resposta aos paradoxos, *Limitação-de-tamanho* carece de *muito* mais justificação. Considere, por exemplo, esta versão do paradoxo de Russell: *nenhum pug fareja exatamente os pugs que não se cheiram a si próprios* (ver ??). Se perguntar “por que não há tal pug?”, não é boa resposta dizer-lhe que tal pug teria de cheirar demasiados pugs. Logo por que seria boa explicação intuitiva, da não existência de um conjunto de Russell, que teria de ser “demasiado grande” para existir?

Em suma, é perdoável estar um pouco perplexo quanto à motivação “intuitiva” para *Limitação-de-tamanho*.

replacement.5 Substituição e “Infinito Absoluto”

sth:replacement:absinf:
sec

Deixamos agora *Limitação-de-tamanho* para trás e exploramos uma outra família de tentativas (intrínsecas) de justificar a Substituição, que levam a sério a ideia de conjuntos formados em estágios.

Quando delineamos pela primeira vez o processo iterativo, oferecemos alguns princípios que explicam o que acontece em cada estágio. Foram *Estágios-são-chave*, *Estágios-são-ordenados*, e *Estágios-acumulam*. Mais tarde, acrescentamos alguns princípios que nos dizem algo sobre o número de estágios: *Estágios-prosseguem* disse-nos que o processo de formação de conjuntos nunca termina, e *Estágios-atíngem-o-infinito* disse-nos que o processo passa por um estágio infinito-ésimo.

E razoável sugerir que estes dois últimos princípios decorrem de algum princípio mais amplo, como:

Estágios-são-inesgotáveis. Há absolutamente infinitamente muitos estágios; a hierarquia é tão alta quanto possível.

Obviamente isto é um princípio informal. Mas mesmo que não seja imediatamente *implicado* pela concepção cumulativa-iterativa de conjunto, certamente parece *consonante* com ela. Pelo menos, e ao contrário de *Limitação-de-tamanho*, retém a ideia de que os conjuntos são formados estágio a estágio.

A esperança, agora, é alavancar *Estágios-são-inesgotáveis* numa justificação da Substituição. Vejamos como isso poderia fazer-se.

Na ??, vimos que é fácil construir uma boa ordenação que (moralmente) deveria ser isomorfa a $\omega + \omega$. Dito de outro modo, podemos facilmente imaginar um processo iterativo estágio a estágio, cujo tipo de ordem (moralmente) é

$\omega + \omega$. Como tal, se aceitamos *Estágios-são-inesgotáveis*, então deveríamos certamente aceitar que há pelo menos um estágio $\omega + \omega$ -ésimo da hierarquia, isto é, $V_{\omega+\omega}$, pois a hierarquia seguramente *poderia* continuar até aqui.

Este pensamento generaliza-se como segue: para qualquer boa ordenação, o processo de construir a hierarquia iterativa deveria correr pelo menos tão longe quanto essa boa ordenação. E poderíamos garantir isto tratando ?? como um *axioma*. Isto diria-nos que toda a boa ordenação é isomorfa a um ordinal de von Neumann. Como cada ordinal de von Neumann será igual ao seu próprio posto, ?? dir-nos-á então que, sempre que possamos descrever uma boa ordenação na nossa teoria de conjuntos, o processo iterativo de formação de conjuntos tem de ultrapassar essa boa ordenação.

Esta ideia parece certamente um corolário de *Estágios-são-inesgotáveis*. Infelizmente, se o nosso objetivo é extrair a Substituição desta ideia, enfrentamos um obstáculo simples e técnico: a Substituição é estritamente mais forte que ?. (Esta observação é feita por Potter (2004, §13.2); prová-lo-emos na [Seção replacement.8.](#))

A conclusão é que, se vamos entender *Estágios-são-inesgotáveis* de modo a obter a Substituição, então não pode *meramente* dizer que a hierarquia ultrapassa qualquer boa ordenação. Tem de fazer uma afirmação mais forte. Com este fim, Shoenfield (1977) propôs um reforço muito natural da ideia, como segue: a hierarquia não é *cofinal* com nenhum conjunto.² Com um pouco mais de pormenor: se τ é um mapeamento que envia conjuntos para estágios da hierarquia, a imagem de qualquer conjunto A sob τ não esgota a hierarquia. Dito de outro modo (esquemáticamente):

Estágios-são-supercofinais. Se A é um conjunto e $\tau(x)$ é um estágio para todo o $x \in A$, então existe um estágio que vem depois de cada $\tau(x)$ para $x \in A$.

É óbvio que **ZF** prova uma versão adequadamente formalizada de *Estágios-são-supercofinais*. Reciprocamente, podemos argumentar informalmente que *Estágios-são-supercofinais* justifica a Substituição.³ De fato, suponha $(\forall x \in A)\exists!y\varphi(x,y)$. Então, para cada $x \in A$, seja $\sigma(x)$ o y tal que $\varphi(x,y)$, e seja $\tau(x)$ o estágio em que $\sigma(x)$ é formado pela primeira vez. Por *Estágios-são-supercofinais*, existe um estágio V tal que $(\forall x \in A)\tau(x) \in V$. Ora, como cada $\tau(x) \in V$ e $\sigma(x) \subseteq \tau(x)$, por Separação podemos obter $\{y \in V : (\exists x \in A)\sigma(x) = y\} = \{y : (\exists x \in A)\varphi(x,y)\}$.

Problema replacement.1. Apresente uma formalização de *Estágios-são-supercofinais* em **ZF**.

²Gödel parece ter proposto um pensamento semelhante; ver Potter (2004, p. 223). Para discussão de Gödel e Shoenfield, ver Incurvati (2020, 90–5).

³Seria mais difícil provar a Substituição usando alguma formalização de *Estágios-são-supercofinais*, pois **Z** por si só não é forte o suficiente para definir os estágios, logo não é claro como se formalizaria *Estágios-são-supercofinais*. Uma opção, contudo, é trabalhar nalguma extensão de **LT**, como discutido na [Seção replacement.3.](#)

Logo *Estágios-são-supercofinais* vindica a Substituição. E é pelo menos plausível que *Estágios-são-inesgotáveis* vindique *Estágios-são-supercofinais*. De fato, suponha que *Estágios-são-supercofinais* falha. Logo a hierarquia é cofinal com algum conjunto A , isto é, temos uma aplicação τ tal que para qualquer estágio S existe algum $x \in A$ tal que $S \in \tau(x)$. Nesse caso, temos de fato uma forma de apreender o suposto “infinito absoluto” da hierarquia: ele é *esgotado* pela imagem de τ aplicada a A . E isso compromete a ideia de que a hierarquia é “absolutamente infinita”. Contrapondo: *Estágios-são-inesgotáveis* implica *Estágios-são-supercofinais*, que por sua vez justifica a Substituição.

Isto representa uma tentativa genuinamente promissora de fornecer uma justificação intrínseca da Substituição. Mas se funciona ultimamente ou não, teremos de deixar para si decidir.

replacement.6 Substituição e Reflexão

sth:replacement:ref:sec A nossa última tentativa de justificar a Substituição, via *Estágios-são-inesgotáveis*, começa com um resultado profundo e elegante:⁴

sth:replacement:ref:reflectionschema **Teorema replacement.2 (Esquema de reflexão).** *Para qualquer fórmula φ :*

$$\forall \alpha \exists \beta > \alpha (\forall x_1 \dots, x_n \in V_\beta) (\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{V_\beta}(x_1, \dots, x_n))$$

Como na **Definição replacement.1**, φ^{V_β} é o resultado de restringir todos os quantificadores de φ ao conjunto V_β . Assim, intuitivamente, a Reflexão diz o seguinte: se φ é verdadeira em toda a hierarquia, então φ é verdadeira em arbitrariamente muitos *segmentos iniciais* da hierarquia.

Montague (1961) e **Lévy (1960)** mostraram que (formulações adequadas da) Substituição e da Reflexão são equivalentes, módulo **Z**, de modo que acrescentar qualquer uma delas dá **ZF**. (Provamos estes resultados na **Seção replacement.7**.) Dada esta equivalência, poder-se-á esperar justificar a Reflexão e a Substituição via *Estágios-são-inesgotáveis* do seguinte modo: dado *Estágios-são-inesgotáveis*, a hierarquia deverá ser muito, muito alta; tão alta, de fato, que nada do que podemos dizer sobre ela é suficiente para limitar a sua altura. E podemos entender isto como a ideia de que, se qualquer sentença φ é verdadeira em toda a hierarquia, então é verdadeira em arbitrariamente muitos segmentos iniciais da hierarquia. E isso é precisamente a Reflexão.

De novo, isto parece uma tentativa genuinamente promissora de fornecer uma justificação intrínseca da Substituição. Mas há demasiado a dizer sobre o assunto aqui. Cabe-lhe agora decidir por si se tem êxito.⁵

replacement.7 Apêndice: Resultados sobre Substituição

sth:replacement:refproofs:sec

⁴Lembrete: todas as fórmulas podem ter parâmetros (salvo indicação explícita em contrário).

⁵Poderá, no entanto, querer continuar lendo **Incurvati (2020, 95–100)**.

A seguir, provaremos a Reflexão dentro de **ZF**. Provaremos também em que sentido a Reflexão é equivalente à Substituição. E provaremos uma consequência interessante de tudo isto, relativa à força da Reflexão/Substituição. *Aviso: isto é, de longe, a parte mais avançada de matemática deste manual.*

Começamos com um lema que, por brevidade, recorre ao expediente notacional do *sobrelinhado* para lidar com sequências de variáveis ou objetos. Assim: “ $\bar{a}_k$ ” abrevia “ $a_{k_1}, \dots, a_{k_n}$ ”, onde n é determinado pelo contexto.

Lema replacement.3. *Para cada $1 \leq i \leq k$, seja $\varphi_i(\bar{v}_i, x)$ uma fórmula. Então, para cada α existe algum $\beta > \alpha$ tal que, para quaisquer $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \in V_\beta$ e cada $1 \leq i \leq k$:*

*sth:replacement:refproofs:
lemreflection*

$$\exists x \varphi_i(\bar{a}_i, x) \rightarrow (\exists x \in V_\beta) \varphi_i(\bar{a}_i, x)$$

Prova. Definimos um termo μ como segue: $\mu(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k)$ é o estágio mínimo, V , que satisfaz todos os seguintes condicionais, para $1 \leq i \leq k$:

$$\exists x \varphi_i(\bar{a}_i, x) \rightarrow (\exists x \in V) \varphi_i(\bar{a}_i, x)$$

É fácil verificar que $\mu(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k)$ existe para todos $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$. Ora, usando a Substituição e o nosso teorema de recursão, definimos:

$$\begin{aligned} S_0 &= V_{\alpha+1} \\ S_{n+1} &= S_n \cup \bigcup \{ \mu(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k) : \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \in S_n \} \\ S &= \bigcup_{m < \omega} S_m. \end{aligned}$$

Cada S_n , e portanto o próprio S , é um estágio depois de V_α . Fixemos $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \in S$; logo existe algum $n < \omega$ tal que $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \in S_n$. Fixemos algum $1 \leq i \leq k$, e suponhamos que $\exists x \varphi_i(\bar{a}_i, x)$. Então $(\exists x \in \mu(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k)) \varphi_i(\bar{a}_i, x)$ por construção, logo $(\exists x \in S_{n+1}) \varphi_i(\bar{a}_i, x)$ e portanto $(\exists x \in S) \varphi_i(\bar{a}_i, x)$. Logo S é o nosso V_β . $\square$

Podemos agora provar **Teorema replacement.2** de forma bastante direta:

Prova. Fixemos α . Sem perda de generalidade, podemos assumir que os únicos conectivos de φ são $\exists$, $\neg$ e $\wedge$ (pois estes são expressivamente adequados). Sejam $\psi_1, \dots, \psi_k$ uma enumeração de cada uma das subfórmulas de φ por ordem de complexidade, de modo que $\psi_k = \varphi$. Por **Lema replacement.3**, existe um $\beta > \alpha$ tal que, para qualquer $\bar{a}_i \in V_\beta$ e cada $1 \leq i \leq k$:

$$\exists x \psi_i(\bar{a}_i, x) \rightarrow (\exists x \in V_\beta) \psi_i(\bar{a}_i, x) \quad (*)$$

Por indução na complexidade de ψ_i , mostraremos que $\psi_i(\bar{a}_i) \leftrightarrow \psi_i^{V_\beta}(\bar{a}_i)$, para qualquer $\bar{a}_i \in V_\beta$. Se ψ_i é atômica, isto é trivial. A bicondicional estabelece também que, quando ψ_i é uma negação ou conjunção de subfórmulas que satisfazem esta propriedade, a própria ψ_i satisfaz esta propriedade. Logo o único

caso interessante é o da quantificação. Fixemos $\bar{a}_i \in V_\beta$; então:

$$\begin{array}{ll} (\exists x \psi_i(\bar{a}_i, x))^{V_\beta} & \text{sse } (\exists x \in V_\beta) \psi_i^{V_\beta}(\bar{a}_i, x) & \text{por definição} \\ & \text{sse } (\exists x \in V_\beta) \psi_i(\bar{a}_i, x) & \text{por hipótese} \\ & \text{sse } \exists x \psi_i(\bar{a}_i, x) & \text{por } (*) \end{array}$$

Isto completa a indução; o resultado segue pois $\psi_k = \varphi$. $\square$

Provamos a Reflexão em **ZF**. A nossa prova seguiu essencialmente [Montague \(1961\)](#). Queremos agora provar em **Z** que a Reflexão implica a Substituição. A prova segue [Lévy \(1960\)](#), com uma simplificação.

Como trabalhamos em **Z**, não podemos apresentar a Reflexão exatamente na forma dada acima. Afinal, formulamos a Reflexão usando a notação “ V_α ”, e isso não pode ser definido em **Z** (ver ??). Em vez disso, ofereceremos uma formulação aparentemente mais fraca da Substituição, como segue:

Reflexão fraca. Para qualquer fórmula φ , existe um conjunto transitivo S tal que $0, 1$ e quaisquer parâmetros de φ são [membros](#) de S , e $(\forall \bar{x} \in S)(\varphi \leftrightarrow \varphi^S)$.

Para usar isto na prova da Substituição, seguiremos primeiro [Lévy \(1960, primeira parte do Teorema 2\)](#) e mostraremos que podemos “refletir” duas fórmulas de uma vez:

sth:replacement:refproofs:
lem:reflect

Lema replacement.4 (em **Z + Reflexão fraca.).** Para quaisquer fórmulas ψ, χ , existe um conjunto transitivo S tal que 0 e 1 (e quaisquer parâmetros das fórmulas) são [membros](#) de S , e $(\forall \bar{x} \in S)((\psi \leftrightarrow \psi^S) \wedge (\chi \leftrightarrow \chi^S))$.

Prova. Seja φ a fórmula $(z = 0 \wedge \psi) \vee (z = 1 \wedge \chi)$.

Aqui usamos uma abreviatura; devemos explicitar “ $z = 0$ ” como “ $\forall t t \notin z$ ” e “ $z = 1$ ” como “ $\forall s (s \in z \leftrightarrow \forall t t \notin s)$ ”. Mas como $0, 1 \in S$ e S é transitivo, estas fórmulas são *absolutas* para S ; isto é, aplicam-se ao mesmo objeto quer restrinjamos os seus quantificadores a S .⁶

Pela Reflexão fraca, temos algum S adequado tal que:

$$\begin{aligned} & (\forall z, \bar{x} \in S)(\varphi \leftrightarrow \varphi^S) \\ \text{isto é } & (\forall z, \bar{x} \in S)((z = 0 \wedge \psi) \vee (z = 1 \wedge \chi)) \leftrightarrow \\ & ((z = 0 \wedge \psi) \vee (z = 1 \wedge \chi))^S \\ \text{isto é } & (\forall z, \bar{x} \in S)((z = 0 \wedge \psi) \vee (z = 1 \wedge \chi)) \leftrightarrow \\ & ((z = 0 \wedge \psi^S) \vee (z = 1 \wedge \chi^S)) \\ \text{isto é } & (\forall \bar{x} \in S)((\psi \leftrightarrow \psi^S) \wedge (\chi \leftrightarrow \chi^S)) \end{aligned}$$

A segunda afirmação implica a terceira porque “ $z = 0$ ” e “ $z = 1$ ” são absolutas para S ; a quarta segue pois $0 \neq 1$. $\square$

⁶Mais formalmente, seja ξ qualquer uma destas fórmulas; então $\xi(z) \leftrightarrow \xi^S(z)$.

Podemos agora obter a Substituição, seguindo e simplificando Lévy (1960, Teorema 6):

Teorema replacement.5 (em $\mathbf{Z} + \text{Reflexão fraca}$). *Para qualquer fórmula $\varphi(v, w)$, e qualquer A , se $(\forall x \in A)\exists!y \varphi(x, y)$, então $\{y : (\exists x \in A)\varphi(x, y)\}$ existe.*

Prova. Fixemos A tal que $(\forall x \in A)\exists!y \varphi(x, y)$, e definimos fórmulas:

$$\psi \text{ é } (\varphi(x, z) \wedge A = z)$$

$$\chi \text{ é } \exists y \varphi(x, y)$$

Usando **Lema replacement.4**, como A é um parâmetro de ψ , existe um conjunto transitivo S tal que $0, 1, A \in S$ (juntamente com quaisquer outros parâmetros), e tal que:

$$(\forall x, z \in S)((\psi \leftrightarrow \psi^S) \wedge (\chi \leftrightarrow \chi^S))$$

Logo, em particular:

$$(\forall x, z \in S)(\varphi(x, z) \leftrightarrow \varphi^S(x, z))$$

$$(\forall x \in S)(\exists y \varphi(x, y) \leftrightarrow (\exists y \in S)\varphi^S(x, y))$$

Combinando isto, e observando que $A \subseteq S$ pois $A \in S$ e S é transitivo:

$$(\forall x \in A)(\exists y \varphi(x, y) \leftrightarrow (\exists y \in S)\varphi(x, y))$$

Ora, $(\forall x \in A)(\exists!y \in S)\varphi(x, y)$, porque $(\forall x \in A)\exists!y \varphi(x, y)$. Ora, a Separação dá $\{y \in S : (\exists x \in A)\varphi(x, y)\} = \{y : (\exists x \in A)\varphi(x, y)\}$. $\square$

replacement.8 Apêndice: Axiomatizabilidade finita

Terminamos este capítulo extraindo alguns resultados da Substituição. O primeiro resultado é devido a Montague (1961); note que não é uma prova *dentro* de $\mathbf{ZF}$, mas uma prova *sobre* $\mathbf{ZF}$:

sth:replacement:finiteaxiomatization

Teorema replacement.6. $\mathbf{ZF}$ não é finitamente axiomatizável. Mais geralmente: se $\mathbf{T}$ é finita e $\mathbf{T} \vdash \mathbf{ZF}$, então $\mathbf{T}$ é inconsistente.

sth:replacement:finiteaxiomatization
zfnofinitely

(Aqui nos restringimos tacitamente a sentenças de primeira ordem cujo único primitivo não lógico é $\in$, e escrevemos $\mathbf{T} \vdash \mathbf{ZF}$ para indicar que $\mathbf{T} \vdash \varphi$ para todo o $\varphi \in \mathbf{ZF}$.)

Prova. Fixemos $\mathbf{T}$ finita tal que $\mathbf{T} \vdash \mathbf{ZF}$. Logo $\mathbf{T}$ prova a Reflexão, isto é, **Teorema replacement.2**. Como $\mathbf{T}$ é finita, podemos reescrevê-la como uma única conjunção, θ . Refletindo com esta fórmula, $\mathbf{T} \vdash \exists\beta(\theta \leftrightarrow \theta^{V_\beta})$. Como trivialmente $\mathbf{T} \vdash \theta$, obtemos $\mathbf{T} \vdash \exists\beta \theta^{V_\beta}$.

Ora, seja $\psi(X)$ uma abreviatura de:

$$\theta^X \wedge X \text{ é transitivo} \wedge (\forall Y \in X)(Y \text{ é transitivo} \rightarrow \neg\theta^Y)$$

isto diz, em traços largos: X é um modelo transitivo de θ , e $\in$ -minimal a esse respeito. Ora, recordando que $\mathbf{T} \vdash \exists \beta \theta^{V_\beta}$, por fatos básicos sobre postos dentro de $\mathbf{ZF}$ e portanto dentro de $\mathbf{T}$, temos:

$$\mathbf{T} \vdash \exists M \psi(M). \quad (*)$$

Usando o primeiro conjunto de $\psi(X)$, sempre que $\mathbf{T} \vdash \sigma$, temos $\mathbf{T} \vdash \forall X(\psi(X) \rightarrow \sigma^X)$. Logo, por $(*)$:

$$\mathbf{T} \vdash \forall X(\psi(X) \rightarrow (\exists N \psi(N))^X)$$

Usando isto, e $(*)$ de novo:

$$\mathbf{T} \vdash \exists M(\psi(M) \wedge (\exists N \psi(N))^M)$$

Em particular, então:

$$\mathbf{T} \vdash \exists M(\psi(M) \wedge (\exists N \in M)((N \text{ é transitivo})^N \wedge (\theta^N)^M))$$

Logo, por raciocínio elementar sobre transitividade:

$$\mathbf{T} \vdash \exists M(\psi(M) \wedge (\exists N \in M)(N \text{ é transitivo} \wedge \theta^N))$$

Logo $\mathbf{T}$ é inconsistente.⁷ □

Eis um resultado semelhante, assinalado por [Potter \(2004, 223\)](#):

Proposição replacement.7. *Seja $\mathbf{T}$ uma extensão de $\mathbf{Z}$ com um número finito de novos axiomas. Se $\mathbf{T} \vdash \mathbf{ZF}$, então $\mathbf{T}$ é inconsistente. (Aqui usamos as mesmas restrições tácitas que para [Teorema replacement.6](#).)*

Prova. Usemos θ para a conjunção de todos os axiomas de $\mathbf{T}$ *exceto* as (infinitas) instâncias de Separação. Definindo ψ a partir de θ como no [Teorema replacement.6](#), podemos mostrar que $\mathbf{T} \vdash \exists M \psi(M)$.

Como no [Teorema replacement.6](#), podemos estabelecer o esquema de que, sempre que $\mathbf{T} \vdash \sigma$, temos $\mathbf{T} \vdash \forall X(\psi(X) \rightarrow \sigma^X)$. Terminamos a prova exatamente como no [Teorema replacement.6](#).

No entanto, estabelecer o esquema envolve um pouco mais de trabalho do que no [Teorema replacement.6](#). Afinal, as instâncias de Separação estão em $\mathbf{T}$, mas não são conjuntos de θ . Contudo, podemos ultrapassar este obstáculo provando que $\mathbf{T} \vdash \forall X(X \text{ é transitivo} \rightarrow \sigma^X)$, para toda a instância de Separação σ . Deixamos isto ao leitor. □

Problema replacement.2. Mostre que, para toda a instância de Separação σ , tem-se: $\mathbf{Z} \vdash \forall X(X \text{ é transitivo} \rightarrow \sigma^X)$. (Usamos este esquema na [Proposição replacement.7](#).)

⁷Este “raciocínio elementar” envolve provar certos “fatos de absolutidade” para conjuntos transitivos.

Problema replacement.3. Mostre que, para todo o $\varphi \in \mathbf{Z}$, tem-se $\mathbf{ZF} \vdash \varphi^{V_{\omega+\omega}}$.

Problema replacement.4. Confirme os restantes resultados esquemáticos invocados nas provas de **Teorema replacement.6** e **Proposição replacement.7**.

Como observamos na **Seção replacement.5**, isto mostra que a Substituição é estritamente mais forte que $??$. Ou, um pouco mais precisamente: se $\mathbf{Z} +$ “toda a boa ordenação é isomorfa a um ordinal único” for consistente, então não prova alguma instância da Substituição.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

- Boolos, George. 1971. The iterative conception of set. *The Journal of Philosophy* 68(8): 215–31.
- Boolos, George. 1989. Iteration again. *Philosophical Topics* 17(2): 5–21.
- Button, Tim. 2021. Level theory, part 1: Axiomatizing the bare idea of a cumulative hierarchy of sets. *The Bulletin of Symbolic Logic* 27(4): 436–460.
- Incurvati, Luca. 2020. *Conceptions of Set and the Foundations of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lévy, Azriel. 1960. Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory. *Pacific Journal of Mathematics* 10(1): 223–38.
- Maddy, Penelope. 1988a. Believing the axioms I. *The Journal of Symbolic Logic* 53(2): 481–511.
- Maddy, Penelope. 1988b. Believing the axioms II. *The Journal of Symbolic Logic* 53(3): 736–64.
- Montague, Richard. 1961. Semantic closure and non-finite axiomatizability I. In *Infinitistic Methods: Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics (Warsaw 1959)*, 45–69. New York: Pergamon.
- Montague, Richard. 1965. Set theory and higher-order logic. In *Formal systems and recursive functions*, eds. John Crossley and Michael Dummett, 131–48. Amsterdam: North-Holland. Proceedings of the Eight Logic Colloquium, July 1963.
- Potter, Michael. 2004. *Set Theory and its Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.
- Scott, Dana. 1974. Axiomatizing set theory. In *Axiomatic Set Theory II*, ed. Thomas Jech, 207–14. American Mathematical Society. Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society, July–August 1967.
- Shoenfield, Joseph R. 1977. Axioms of set theory. In *Handbook of Mathematical Logic*, ed. Jon Barwise, 321–44. London: North-Holland.