

replacement.1 Apêndice: Resultados sobre Substituição

sth:replacement:refproofs:
sec

A seguir, provaremos a Reflexão dentro de **ZF**. Provaremos também em que sentido a Reflexão é equivalente à Substituição. E provaremos uma consequência interessante de tudo isto, relativa à força da Reflexão/Substituição. *Aviso: isto é, de longe, a parte mais avançada de matemática deste manual.*

Começamos com um lema que, por brevidade, recorre ao expediente notacional do *sobrelinhado* para lidar com seqüências de variáveis ou objetos. Assim: “ $\bar{a}_k$ ” abrevia “ $a_{k_1}, \dots, a_{k_n}$ ”, onde n é determinado pelo contexto.

sth:replacement:refproofs:
lemreflection

Lema replacement.1. *Para cada $1 \leq i \leq k$, seja $\varphi_i(\bar{v}_i, x)$ uma fórmula. Então, para cada α existe algum $\beta > \alpha$ tal que, para quaisquer $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \in V_\beta$ e cada $1 \leq i \leq k$:*

$$\exists x \varphi_i(\bar{a}_i, x) \rightarrow (\exists x \in V_\beta) \varphi_i(\bar{a}_i, x)$$

Prova. Definimos um termo μ como segue: $\mu(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k)$ é o estágio mínimo, V , que satisfaz todos os seguintes condicionais, para $1 \leq i \leq k$:

$$\exists x \varphi_i(\bar{a}_i, x) \rightarrow (\exists x \in V) \varphi_i(\bar{a}_i, x)$$

É fácil verificar que $\mu(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k)$ existe para todos $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k$. Ora, usando a Substituição e o nosso teorema de recursão, definimos:

$$\begin{aligned} S_0 &= V_{\alpha+1} \\ S_{n+1} &= S_n \cup \bigcup \{ \mu(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k) : \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \in S_n \} \\ S &= \bigcup_{m < \omega} S_m. \end{aligned}$$

Cada S_n , e portanto o próprio S , é um estágio depois de V_α . Fixemos $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \in S$; logo existe algum $n < \omega$ tal que $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \in S_n$. Fixemos algum $1 \leq i \leq k$, e suponhamos que $\exists x \varphi_i(\bar{a}_i, x)$. Então $(\exists x \in \mu(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k)) \varphi_i(\bar{a}_i, x)$ por construção, logo $(\exists x \in S_{n+1}) \varphi_i(\bar{a}_i, x)$ e portanto $(\exists x \in S) \varphi_i(\bar{a}_i, x)$. Logo S é o nosso V_β . $\square$

Podemos agora provar ?? de forma bastante direta:

Prova. Fixemos α . Sem perda de generalidade, podemos assumir que os únicos conectivos de φ são $\exists, \neg$ e $\wedge$ (pois estes são expressivamente adequados). Sejam $\psi_1, \dots, \psi_k$ uma enumeração de cada uma das subfórmulas de φ por ordem de complexidade, de modo que $\psi_k = \varphi$. Por **Lema replacement.1**, existe um $\beta > \alpha$ tal que, para qualquer $\bar{a}_i \in V_\beta$ e cada $1 \leq i \leq k$:

$$\exists x \psi_i(\bar{a}_i, x) \rightarrow (\exists x \in V_\beta) \psi_i(\bar{a}_i, x) \quad (*)$$

Por indução na complexidade de ψ_i , mostraremos que $\psi_i(\bar{a}_i) \leftrightarrow \psi_i^{V_\beta}(\bar{a}_i)$, para qualquer $\bar{a}_i \in V_\beta$. Se ψ_i é atômica, isto é trivial. A bicondicional estabelece

também que, quando ψ_i é uma negação ou conjunção de subfórmulas que satisfazem esta propriedade, a própria ψ_i satisfaz esta propriedade. Logo o único caso interessante é o da quantificação. Fixemos $\bar{a}_i \in V_\beta$; então:

$$\begin{array}{ll} (\exists x \psi_i(\bar{a}_i, x))^{V_\beta} & \text{sse } (\exists x \in V_\beta) \psi_i^{V_\beta}(\bar{a}_i, x) & \text{por definição} \\ & \text{sse } (\exists x \in V_\beta) \psi_i(\bar{a}_i, x) & \text{por hipótese} \\ & \text{sse } \exists x \psi_i(\bar{a}_i, x) & \text{por } (*) \end{array}$$

Isto completa a indução; o resultado segue pois $\psi_k = \varphi$. $\square$

Provamos a Reflexão em **ZF**. A nossa prova seguiu essencialmente [Montague \(1961\)](#). Queremos agora provar em **Z** que a Reflexão implica a Substituição. A prova segue [Lévy \(1960\)](#), com uma simplificação.

Como trabalhamos em **Z**, não podemos apresentar a Reflexão exatamente na forma dada acima. Afinal, formulamos a Reflexão usando a notação “ V_α ”, e isso não pode ser definido em **Z** (ver ??). Em vez disso, ofereceremos uma formulação aparentemente mais fraca da Substituição, como segue:

Reflexão fraca. Para qualquer fórmula φ , existe um conjunto transitivo S tal que 0, 1 e quaisquer parâmetros de φ são [membros](#) de S , e $(\forall \bar{x} \in S)(\varphi \leftrightarrow \varphi^S)$.

Para usar isto na prova da Substituição, seguiremos primeiro [Lévy \(1960](#), primeira parte do Teorema 2) e mostraremos que podemos “refletir” duas fórmulas de uma vez:

Lema replacement.2 (em **Z + Reflexão fraca.).** *Para quaisquer fórmulas ψ, χ , existe um conjunto transitivo S tal que 0 e 1 (e quaisquer parâmetros das fórmulas) são [membros](#) de S , e $(\forall \bar{x} \in S)((\psi \leftrightarrow \psi^S) \wedge (\chi \leftrightarrow \chi^S))$.*

[sth:replacement:refproofs:](#)
[lem:reflect](#)

Prova. Seja φ a fórmula $(z = 0 \wedge \psi) \vee (z = 1 \wedge \chi)$.

Aqui usamos uma abreviatura; devemos explicitar “ $z = 0$ ” como “ $\forall t t \notin z$ ” e “ $z = 1$ ” como “ $\forall s(s \in z \leftrightarrow \forall t t \notin s)$ ”. Mas como $0, 1 \in S$ e S é transitivo, estas fórmulas são *absolutas* para S ; isto é, aplicam-se ao mesmo objeto quer restrinjamos os seus quantificadores a S .¹

Pela Reflexão fraca, temos algum S adequado tal que:

$$\begin{aligned} & (\forall z, \bar{x} \in S)(\varphi \leftrightarrow \varphi^S) \\ \text{isto é } & (\forall z, \bar{x} \in S)((z = 0 \wedge \psi) \vee (z = 1 \wedge \chi)) \leftrightarrow \\ & ((z = 0 \wedge \psi) \vee (z = 1 \wedge \chi))^S \\ \text{isto é } & (\forall z, \bar{x} \in S)((z = 0 \wedge \psi) \vee (z = 1 \wedge \chi)) \leftrightarrow \\ & ((z = 0 \wedge \psi^S) \vee (z = 1 \wedge \chi^S)) \\ \text{isto é } & (\forall \bar{x} \in S)((\psi \leftrightarrow \psi^S) \wedge (\chi \leftrightarrow \chi^S)) \end{aligned}$$

¹Mais formalmente, seja ξ qualquer uma destas fórmulas; então $\xi(z) \leftrightarrow \xi^S(z)$.

A segunda afirmação implica a terceira porque “ $z = 0$ ” e “ $z = 1$ ” são absolutas para S ; a quarta segue pois $0 \neq 1$. $\square$

Podemos agora obter a Substituição, seguindo e simplificando Lévy (1960, Teorema 6):

Teorema replacement.3 (em $\mathbf{Z} + \text{Reflexão fraca}$). *Para qualquer fórmula $\varphi(v, w)$, e qualquer A , se $(\forall x \in A)\exists!y \varphi(x, y)$, então $\{y : (\exists x \in A)\varphi(x, y)\}$ existe.*

Prova. Fixemos A tal que $(\forall x \in A)\exists!y \varphi(x, y)$, e definimos fórmulas:

$$\begin{aligned}\psi &\text{ é } (\varphi(x, z) \wedge A = A) \\ \chi &\text{ é } \exists y \varphi(x, y)\end{aligned}$$

Usando **Lema replacement.2**, como A é um parâmetro de ψ , existe um conjunto transitivo S tal que $0, 1, A \in S$ (juntamente com quaisquer outros parâmetros), e tal que:

$$(\forall x, z \in S)((\psi \leftrightarrow \psi^S) \wedge (\chi \leftrightarrow \chi^S))$$

Logo, em particular:

$$\begin{aligned}(\forall x, z \in S)(\varphi(x, z) \leftrightarrow \varphi^S(x, z)) \\ (\forall x \in S)(\exists y \varphi(x, y) \leftrightarrow (\exists y \in S)\varphi^S(x, y))\end{aligned}$$

Combinando isto, e observando que $A \subseteq S$ pois $A \in S$ e S é transitivo:

$$(\forall x \in A)(\exists y \varphi(x, y) \leftrightarrow (\exists y \in S)\varphi(x, y))$$

Ora, $(\forall x \in A)(\exists!y \in S)\varphi(x, y)$, porque $(\forall x \in A)\exists!y \varphi(x, y)$. Ora, a Separação dá $\{y \in S : (\exists x \in A)\varphi(x, y)\} = \{y : (\exists x \in A)\varphi(x, y)\}$. $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Lévy, Azriel. 1960. Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory. *Pacific Journal of Mathematics* 10(1): 223–38.

Montague, Richard. 1961. Semantic closure and non-finite axiomatizability I. In *Infinitistic Methods: Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics (Warsaw 1959)*, 45–69. New York: Pergamon.