

replacement.1 Substituição e Reflexão

sth:replacement:ref: A nossa última tentativa de justificar a Substituição, via *Estágios-são-inesgotáveis*,
sec começa com um resultado profundo e elegante:¹

sth:replacement:ref: **Teorema replacement.1 (Esquema de reflexão).** Para qualquer fórmula
reflectionschema φ :

$$\forall \alpha \exists \beta > \alpha (\forall x_1 \dots, x_n \in V_\beta) (\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{V_\beta}(x_1, \dots, x_n))$$

Como na ??, φ^{V_β} é o resultado de restringir todos os quantificadores de φ ao conjunto V_β . Assim, intuitivamente, a Reflexão diz o seguinte: se φ é verdadeira em toda a hierarquia, então φ é verdadeira em arbitrariamente muitos *segmentos iniciais* da hierarquia.

Montague (1961) e Lévy (1960) mostraram que (formulações adequadas da) Substituição e da Reflexão são equivalentes, módulo **Z**, de modo que acrescentar qualquer uma delas dá **ZF**. (Provamos estes resultados na ??.) Dada esta equivalência, poder-se-á esperar justificar a Reflexão e a Substituição via *Estágios-são-inesgotáveis* do seguinte modo: dado *Estágios-são-inesgotáveis*, a hierarquia deverá ser muito, muito alta; tão alta, de fato, que nada do que podemos dizer sobre ela é suficiente para limitar a sua altura. E podemos entender isto como a ideia de que, se qualquer sentença φ é verdadeira em toda a hierarquia, então é verdadeira em arbitrariamente muitos segmentos iniciais da hierarquia. E isso é precisamente a Reflexão.

De novo, isto parece uma tentativa genuinamente promissora de fornecer uma justificação intrínseca da Substituição. Mas há demasiado a dizer sobre o assunto aqui. Cabe-lhe agora decidir por si se tem êxito.²

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

- Incurvati, Luca. 2020. *Conceptions of Set and the Foundations of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lévy, Azriel. 1960. Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory. *Pacific Journal of Mathematics* 10(1): 223–38.
- Montague, Richard. 1961. Semantic closure and non-finite axiomatizability I. In *Infinitistic Methods: Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics (Warsaw 1959)*, 45–69. New York: Pergamon.

¹Lembrete: todas as fórmulas podem ter parâmetros (salvo indicação explícita em contrário).

²Poderá, no entanto, querer continuar lendo Incurvati (2020, 95–100).