

replacement.1 Substituição e “Infinito Absoluto”

sth:replacement:absinf:
sec

Deixamos agora *Limitação-de-tamanho* para trás e exploramos uma outra família de tentativas (intrínsecas) de justificar a Substituição, que levam a sério a ideia de conjuntos formados em estágios.

Quando delineamos pela primeira vez o processo iterativo, oferecemos alguns princípios que explicam o que acontece em cada estágio. Foram *Estágios-são-chave*, *Estágios-são-ordenados*, e *Estágios-acumulam*. Mais tarde, acrescentamos alguns princípios que nos dizem algo sobre o número de estágios: *Estágios-prosseguem* disse-nos que o processo de formação de conjuntos nunca termina, e *Estágios-atingem-o-infinito* disse-nos que o processo passa por um estágio infinito-ésimo.

É razoável sugerir que estes dois últimos princípios decorrem de algum princípio mais amplo, como:

Estágios-são-inesgotáveis. Há absolutamente infinitamente muitos estágios; a hierarquia é tão alta quanto possível.

Obviamente isto é um princípio informal. Mas mesmo que não seja imediatamente *implicado* pela concepção cumulativa-iterativa de conjunto, certamente parece *consonante* com ela. Pelo menos, e ao contrário de *Limitação-de-tamanho*, retém a ideia de que os conjuntos são formados estágio a estágio.

A esperança, agora, é alavancar *Estágios-são-inesgotáveis* numa justificação da Substituição. Vejamos como isso poderia fazer-se.

Na ??, vimos que é fácil construir uma boa ordenação que (moralmente) deveria ser isomorfa a $\omega + \omega$. Dito de outro modo, podemos facilmente imaginar um processo iterativo estágio a estágio, cujo tipo de ordem (moralmente) é $\omega + \omega$. Como tal, se aceitamos *Estágios-são-inesgotáveis*, então deveríamos certamente aceitar que há pelo menos um estágio $\omega + \omega$ -ésimo da hierarquia, isto é, $V_{\omega+\omega}$, pois a hierarquia seguramente *poderia* continuar até aqui.

Este pensamento generaliza-se como segue: para qualquer boa ordenação, o processo de construir a hierarquia iterativa deveria correr pelo menos tão longe quanto essa boa ordenação. E poderíamos garantir isto tratando ?? como um *axioma*. Isto diria-nos que toda a boa ordenação é isomorfa a um ordinal de von Neumann. Como cada ordinal de von Neumann será igual ao seu próprio posto, ?? dir-nos-á então que, sempre que possamos descrever uma boa ordenação na nossa teoria de conjuntos, o processo iterativo de formação de conjuntos tem de ultrapassar essa boa ordenação.

Esta ideia parece certamente um corolário de *Estágios-são-inesgotáveis*. Infelizmente, se o nosso objetivo é extrair a Substituição desta ideia, enfrentamos um obstáculo simples e técnico: a Substituição é estritamente mais forte que ??. (Esta observação é feita por Potter (2004, §13.2); prová-lo-emos na ??.)

A conclusão é que, se vamos entender *Estágios-são-inesgotáveis* de modo a obter a Substituição, então não pode *meramente* dizer que a hierarquia ultrapassa qualquer boa ordenação. Tem de fazer uma afirmação mais forte. Com este fim, Shoenfield (1977) propôs um reforço muito natural da ideia, como

segue: a hierarquia não é *cofinal* com nenhum conjunto.¹ Com um pouco mais de pormenor: se τ é um mapeamento que envia conjuntos para estágios da hierarquia, a imagem de qualquer conjunto A sob τ não esgota a hierarquia. Dito de outro modo (esquemáticamente):

Estágios-são-supercofinais. Se A é um conjunto e $\tau(x)$ é um estágio para todo o $x \in A$, então existe um estágio que vem depois de cada $\tau(x)$ para $x \in A$.

É óbvio que **ZF** prova uma versão adequadamente formalizada de *Estágios-são-supercofinais*. Reciprocamente, podemos argumentar informalmente que *Estágios-são-supercofinais* justifica a Substituição.² De fato, suponha $(\forall x \in A) \exists! y \varphi(x, y)$. Então, para cada $x \in A$, seja $\sigma(x)$ o y tal que $\varphi(x, y)$, e seja $\tau(x)$ o estágio em que $\sigma(x)$ é formado pela primeira vez. Por *Estágios-são-supercofinais*, existe um estágio V tal que $(\forall x \in A) \tau(x) \in V$. Ora, como cada $\tau(x) \in V$ e $\sigma(x) \subseteq \tau(x)$, por Separação podemos obter $\{y \in V : (\exists x \in A) \sigma(x) = y\} = \{y : (\exists x \in A) \varphi(x, y)\}$.

Problema replacement.1. Apresente uma formalização de *Estágios-são-supercofinais* em **ZF**.

Logo *Estágios-são-supercofinais* vindica a Substituição. E é pelo menos plausível que *Estágios-são-inesgotáveis* vindique *Estágios-são-supercofinais*. De fato, suponha que *Estágios-são-supercofinais* falha. Logo a hierarquia é cofinal com algum conjunto A , isto é, temos uma aplicação τ tal que para qualquer estágio S existe algum $x \in A$ tal que $S \in \tau(x)$. Nesse caso, temos de fato uma forma de apreender o suposto “infinito absoluto” da hierarquia: ele é *esgotado* pela imagem de τ aplicada a A . E isso compromete a ideia de que a hierarquia é “absolutamente infinita”. Contrapondo: *Estágios-são-inesgotáveis* implica *Estágios-são-supercofinais*, que por sua vez justifica a Substituição.

Isto representa uma tentativa genuinamente promissora de fornecer uma justificação intrínseca da Substituição. Mas se funciona ultimamente ou não, teremos de deixar para si decidir.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Incurvati, Luca. 2020. *Conceptions of Set and the Foundations of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

¹Gödel parece ter proposto um pensamento semelhante; ver Potter (2004, p. 223). Para discussão de Gödel e Shoenfield, ver Incurvati (2020, 90–5).

²Seria mais difícil provar a Substituição usando alguma formalização de *Estágios-são-supercofinais*, pois **Z** por si só não é forte o suficiente para definir os estágios, logo não é claro como se formalizaria *Estágios-são-supercofinais*. Uma opção, contudo, é trabalhar nalguma extensão de **LT**, como discutido na ??.

Potter, Michael. 2004. *Set Theory and its Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.

Shoenfield, Joseph R. 1977. Axioms of set theory. In *Handbook of Mathematical Logic*, ed. Jon Barwise, 321–44. London: North-Holland.