

ordinals.1 Boas Ordenações

sth:ordinals:wo:
sec A noção fundamental é a seguinte:

Definição ordinals.1. A relação $<$ *bem ordena* A sse cumpre estas duas condições:

1. $<$ é conexa, isto é, para todos $a, b \in A$, ou $a < b$ ou $a = b$ ou $b < a$;
2. todo o subconjunto não vazio de A tem um **membro** $<$ -minimal, isto é, se $\emptyset \neq X \subseteq A$ então $(\exists m \in X)(\forall z \in X)z \not< m$

É fácil ver que os três exemplos que acabamos de considerar eram de fato relações de boa ordenação.

Problema ordinals.1. ?? apresentou três ordenações exemplo sobre os números naturais. Verifique que cada uma é uma boa ordenação.

Eis algumas observações elementares mas extremamente importantes sobre boa ordenação.

sth:ordinals:wo:
wo:strictorder **Proposição ordinals.2.** Se $<$ bem ordena A , então todo o subconjunto não vazio de A tem um único membro $<$ -mínimo, e $<$ é irreflexiva, assimétrica e transitiva.

Prova. Se X é um subconjunto não vazio de A , tem um **membro** $<$ -minimal m , isto é, $(\forall z \in X)z \not< m$. Como $<$ é conexa, $(\forall z \in X)m \leq z$. Logo m é o **membro** $<$ -mínimo de X .

Para a irreflexividade, fixe $a \in A$; o **membro** $<$ -mínimo de $\{a\}$ é a , logo $a \not< a$. Para a transitividade, se $a < b < c$, então como $\{a, b, c\}$ tem um **membro** $<$ -mínimo, $a < c$. A assimetria segue da irreflexividade e da transitividade $\square$

sth:ordinals:wo:
propwoinduction **Proposição ordinals.3.** Se $<$ bem ordena A , então para qualquer fórmula $\varphi(x)$:

$$\text{se } (\forall a \in A)((\forall b < a)\varphi(b) \rightarrow \varphi(a)), \text{ então } (\forall a \in A)\varphi(a).$$

Prova. Provaremos a contrapositiva. Suponha $\neg(\forall a \in A)\varphi(a)$, isto é, que $X = \{x \in A : \neg\varphi(x)\} \neq \emptyset$. Então X tem um **membro** $<$ -minimal, a . Logo $(\forall b < a)\varphi(b)$ mas $\neg\varphi(a)$. $\square$

Esta última propriedade deve recordar-lhe o princípio de indução forte nos naturais, isto é: se $(\forall n \in \omega)((\forall m < n)\varphi(m) \rightarrow \varphi(n))$, então $(\forall n \in \omega)\varphi(n)$. E esta propriedade torna a boa ordenação numa noção muito *robusta*.¹

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

¹Lembrete: todas as fórmulas podem ter parâmetros (salvo indicação em contrário).