

ordinals.1 Construção de Von Neumann dos Ordinais

sth:ordinals:vn:
sec

?? sugere uma ideia. Poderíamos introduzir certos objetos, chamados *tipos de ordem*, para servirem de representantes das boas ordenações. Escrevendo $\text{ord}(A, <)$ para o tipo de ordem da boa ordenação $\langle A, < \rangle$, gostaríamos de garantir os dois princípios seguintes:

$$\begin{aligned}\text{ord}(A, <) &= \text{ord}(B, <) \text{ sse } \langle A, < \rangle \cong \langle B, < \rangle \\ \text{ord}(A, <) &< \text{ord}(B, <) \text{ sse } \langle A, < \rangle \cong \langle B_b, <_b \rangle \text{ para algum } b \in B\end{aligned}$$

Além disso, poderíamos esperar introduzir tipos de ordem *como certos conjuntos*, tal como podemos introduzir os números naturais como certos conjuntos.

A forma mais comum de o fazer—e a abordagem que seguiremos—é definir estes tipos de ordem via certos conjuntos bem ordenados *canônicos*. Estes conjuntos canônicos foram introduzidos pela primeira vez por von Neumann:

Definição ordinals.1. O conjunto A é *transitivo* sse $(\forall x \in A)x \subseteq A$. Então A é um *ordinal* sse A é transitivo e bem ordenado por $\in$.

Daqui em diante, usaremos letras gregas para ordinais. Segue-se imediatamente da definição que, se α é um ordinal, então $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ é uma boa ordenação, onde $\in_\alpha = \{ \langle x, y \rangle \in \alpha^2 : x \in y \}$. Assim, abusando um pouco da notação, podemos dizer que o próprio α é uma boa ordenação.

Eis os primeiros ordinais:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$$

Repare que estes são precisamente os primeiros ordinais que encontramos no nosso Axioma do Infinito, isto é, na definição de von Neumann de ω (ver ??). Isto não é coincidência. A definição de von Neumann dos ordinais trata os números naturais como ordinais, mas permite também ordinais transfinitos.

Como sempre, podemos agora perguntar: *são* estes os ordinais? Ou von Neumann deu-nos apenas alguns conjuntos que podemos *tratar* como os ordinais? O tipo de discussões que se podem ter sobre esta questão é semelhante às que tivemos na ??, ??, ??, e ??, pelo que não insistiremos no ponto. Em vez disso, daqui em diante usaremos “os ordinais” para falar dos “ordinais de von Neumann”.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas