

Capítulo udf

Ordinais

ordinals.1 Introdução

sth:ordinals:intro:
sec

No ??, postulamos que existe um estágio infinito da hierarquia, na forma de *Estágios-atingem-o-infinito* (ver também o nosso axioma do Infinito). Contudo, dado *Estágios-prosseguem*, não podemos parar no estágio infinito; temos de continuar. Assim: no estágio seguinte ao primeiro estágio infinito, formamos todas as coleções possíveis de conjuntos que estavam disponíveis no primeiro estágio infinito; e repetimos; e repetimos; e repetimos; ...

Implicitamente, o que aqui aconteceu foi começarmos a invocar uma noção “intuitiva” de número, segundo a qual podem existir números *depois* de todos os números naturais. Em particular, a noção em causa é a de *ordinal transfinito*. O objetivo deste capítulo é tornar esta ideia mais rigorosa. Exploraremos a noção geral de ordinal e depois definiremos explicitamente certos conjuntos para serem os nossos ordinais.

ordinals.2 A Ideia Geral de um Ordinal

sth:ordinals:idea:
sec

Considere os números naturais, na sua ordem habitual:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$$

Chamamos a isto, na gíria, uma ω -sucessão. E, de fato, esta ordenação geral espelha-se na nossa construção inicial dos estágios da hierarquia de conjuntos. Mas suponha agora que movemos 0 para o fim desta sucessão, de modo que fica depois de todos os outros números:

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots < 0$$

Temos aqui as mesmas entidades, mas ordenadas de modo fundamentalmente diferente: a nossa primeira ordenação não tinha último elemento; a nova tem. De fato, a nova ordenação consiste numa ω -sucessão de entidades $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$, seguida de outra entidade. Será uma sucessão do tipo $\omega + 1$.

Podemos gerar ainda mais tipos de ordenação, usando apenas estas entidades. Por exemplo, considere todos os números pares (na sua ordem natural) seguidos de todos os ímpares (na sua ordem natural):

$$0 < 2 < 4 < \dots < 1 < 3 < \dots$$

Isto é uma ω -sucessão seguida de outra ω -sucessão; uma sucessão do tipo $\omega + \omega$.

Pois bem, podemos continuar. Mas o que gostaríamos é de ter uma forma geral de entender esta linguagem sobre *ordenações*.

ordinals.3 Boas Ordenações

A noção fundamental é a seguinte:

sth:ordinals:wo:
sec

Definição ordinals.1. A relação $<$ *bem ordena* A sse cumpre estas duas condições:

1. $<$ é conexa, isto é, para todos $a, b \in A$, ou $a < b$ ou $a = b$ ou $b < a$;
2. todo o subconjunto não vazio de A tem um **membro** $<$ -minimal, isto é, se $\emptyset \neq X \subseteq A$ então $(\exists m \in X)(\forall z \in X)z \not< m$

É fácil ver que os três exemplos que acabamos de considerar eram de fato relações de boa ordenação.

Problema ordinals.1. **Seção ordinals.2** apresentou três ordenações exemplo sobre os números naturais. Verifique que cada uma é uma boa ordenação.

Eis algumas observações elementares mas extremamente importantes sobre boa ordenação.

Proposição ordinals.2. *Se $<$ bem ordena A , então todo o subconjunto não vazio de A tem um único membro $<$ -mínimo, e $<$ é irreflexiva, assimétrica e transitiva.*

sth:ordinals:wo:
wo:strictorder

Prova. Se X é um subconjunto não vazio de A , tem um **membro** $<$ -minimal m , isto é, $(\forall z \in X)z \not< m$. Como $<$ é conexa, $(\forall z \in X)m \leq z$. Logo m é o **membro** $<$ -mínimo de X .

Para a irreflexividade, fixe $a \in A$; o **membro** $<$ -mínimo de $\{a\}$ é a , logo $a \not< a$. Para a transitividade, se $a < b < c$, então como $\{a, b, c\}$ tem um **membro** $<$ -mínimo, $a < c$. A assimetria segue da irreflexividade e da transitividade $\square$

Proposição ordinals.3. *Se $<$ bem ordena A , então para qualquer fórmula $\varphi(x)$:*

sth:ordinals:wo:
propwoinduction

$$\text{se } (\forall a \in A)((\forall b < a)\varphi(b) \rightarrow \varphi(a)), \text{ então } (\forall a \in A)\varphi(a).$$

Prova. Provaremos a contrapositiva. Suponha $\neg(\forall a \in A)\varphi(a)$, isto é, que $X = \{x \in A : \neg\varphi(x)\} \neq \emptyset$. Então X tem um **membro** $<$ -minimal, a . Logo $(\forall b < a)\varphi(b)$ mas $\neg\varphi(a)$. $\square$

Esta última propriedade deve recordar-lhe o princípio de indução forte nos naturais, isto é: se $(\forall n \in \omega)((\forall m < n)\varphi(m) \rightarrow \varphi(n))$, então $(\forall n \in \omega)\varphi(n)$. E esta propriedade torna a boa ordenação numa noção muito *robusta*.¹

ordinals.4 Isomorfismos de Ordem

sth:ordinals:iso:
sec Para explicar *quão* robusta é a boa ordenação, começaremos por introduzir um método para comparar boas ordenações.

Definição ordinals.4. Uma *boa ordenação* é um par $\langle A, < \rangle$, tal que $<$ bem ordena A . As boas ordenações $\langle A, < \rangle$ e $\langle B, \leq \rangle$ são *isomorfas por ordem* sse existe *uma* *bijeção* $f: A \rightarrow B$ tal que: $x < y$ sse $f(x) \leq f(y)$. Neste caso, escrevemos $\langle A, < \rangle \cong \langle B, \leq \rangle$, e dizemos que f é um *isomorfismo de ordem*.

Daqui em diante, por brevidade, falaremos em “isomorfismos” em vez de “isomorfismos de ordem”. Intuitivamente, os isomorfismos são *bijeções* que preservam estrutura. Eis alguns fatos simples sobre isomorfismos.

sth:ordinals:iso:
isocompose **Lema ordinals.5.** *Composições de isomorfismos são isomorfismos, isto é: se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são isomorfismos, então $(g \circ f): A \rightarrow C$ é um isomorfismo.*

Problema ordinals.2. Prove **Lema ordinals.5**.

Prova. Fica como exercício. □

sth:ordinals:iso:
ordisoisquiv **Corolário ordinals.6.** $X \cong Y$ é uma relação de equivalência.

sth:ordinals:iso:
ordisounique **Proposição ordinals.7.** Se $\langle A, < \rangle$ e $\langle B, \leq \rangle$ são boas ordenações isomorfas, então o isomorfismo entre elas é único.

Prova. Sejam f e g isomorfismos $A \rightarrow B$. Provaremos o resultado por indução, isto é, usando **Proposição ordinals.3**. Fixe $a \in A$, e suponha (para indução) que $(\forall b < a)f(b) = g(b)$. Fixe $x \in B$.

Se $x < f(a)$, então $f^{-1}(x) < a$, logo $g(f^{-1}(x)) < g(a)$, invocando o fato de f e g serem isomorfismos. Mas como $f^{-1}(x) < a$, pela suposição $x = f(f^{-1}(x)) = g(f^{-1}(x))$. Logo $x < g(a)$. Analogamente, se $x \leq g(a)$ então $x \leq f(a)$.

Generalizando, $(\forall x \in B)(x \leq f(a) \leftrightarrow x \leq g(a))$. Segue que $f(a) = g(a)$ por **??**. Logo $(\forall a \in A)f(a) = g(a)$ por **Proposição ordinals.3**. □

Isto dá alguma ideia de que as boas ordenações são robustas. Mas para continuar a explicar isto, convém introduzir mais notação.

Definição ordinals.8. Quando $\langle A, < \rangle$ é uma boa ordenação com $a \in A$, seja $A_a = \{x \in A : x < a\}$. Dizemos que A_a é um *segmento inicial* próprio de A (e permitimos que o próprio A seja um segmento inicial impróprio de A). Seja $<_a$ a restrição de $<$ ao segmento inicial, isto é, $< \upharpoonright_{A_a}$.

¹Lembrete: todas as fórmulas podem ter parâmetros (salvo indicação em contrário).

Com esta notação, podemos enunciar e provar que nenhuma boa ordenação é isomorfa a nenhum dos seus segmentos iniciais próprios.

Lema ordinals.9. *Se $\langle A, < \rangle$ é uma boa ordenação com $a \in A$, então $\langle A, < \rangle \not\cong \langle A_a, <_a \rangle$* sth:ordinals:iso:
wellordnotinitial

Prova. Por redução ao absurdo, suponha $f: A \rightarrow A_a$ um isomorfismo. Como f é uma bijeção e $A_a \subsetneq A$, usando **Proposição ordinals.2** seja $b \in A$ o **membro** $<$ -mínimo de A tal que $b \neq f(b)$. Mostraremos que $(\forall x \in A)(x < b \leftrightarrow x < f(b))$, donde seguirá, por ??, que $b = f(b)$, completando a redução ao absurdo.

Suponha $x < b$. Logo $x = f(x)$, pela escolha de b . E $f(x) < f(b)$, por f ser um isomorfismo. Logo $x < f(b)$.

Suponha $x < f(b)$. Logo $f^{-1}(x) < b$, por f ser um isomorfismo, e portanto $f^{-1}(x) = x$ pela escolha de b . Logo $x < b$. □

O nosso resultado seguinte mostra, grosso modo, que um “segmento inicial” de um isomorfismo é um isomorfismo:

Lema ordinals.10. *Sejam $\langle A, < \rangle$ e $\langle B, < \rangle$ boas ordenações. Se $f: A \rightarrow B$ é um isomorfismo e $a \in A$, então $f|_{A_a}: A_a \rightarrow B_{f(a)}$ é um isomorfismo.* sth:ordinals:iso:
wellordinitialsegment

Prova. Como f é um isomorfismo:

$$\begin{aligned} f[A_a] &= f[\{x \in A : x < a\}] \\ &= f[\{f^{-1}(y) \in A : f^{-1}(y) < a\}] \\ &= \{y \in B : y < f(a)\} \\ &= B_{f(a)} \end{aligned}$$

E $f|_{A_a}$ preserva a ordem porque f preserva. □

Os nossos dois resultados seguintes estabelecem que as boas ordenações são sempre comparáveis:

Lema ordinals.11. *Sejam $\langle A, < \rangle$ e $\langle B, < \rangle$ boas ordenações. Se $\langle A_{a_1}, <_{a_1} \rangle \cong \langle B_{b_1}, <_{b_1} \rangle$ e $\langle A_{a_2}, <_{a_2} \rangle \cong \langle B_{b_2}, <_{b_2} \rangle$, então $a_1 < a_2$ sse $b_1 < b_2$* sth:ordinals:iso:
lemordsegments

Prova. Provaremos da esquerda para a direita; a outra direção é análoga. Suponha ambos $\langle A_{a_1}, <_{a_1} \rangle \cong \langle B_{b_1}, <_{b_1} \rangle$ e $\langle A_{a_2}, <_{a_2} \rangle \cong \langle B_{b_2}, <_{b_2} \rangle$, com $f: A_{a_2} \rightarrow B_{b_2}$ o nosso isomorfismo. Seja $a_1 < a_2$; então $\langle A_{a_1}, <_{a_1} \rangle \cong \langle B_{f(a_1)}, <_{f(a_1)} \rangle$ por **Lema ordinals.10**. Logo $\langle B_{b_1}, <_{b_1} \rangle \cong \langle B_{f(a_1)}, <_{f(a_1)} \rangle$, e portanto $b_1 = f(a_1)$ por **Lema ordinals.9**. Ora, $b_1 < b_2$ pois o domínio de f é B_{b_2} . □

Teorema ordinals.12. *Dadas quaisquer duas boas ordenações, uma é isomorfa a um segmento inicial (não necessariamente próprio) da outra.* sth:ordinals:iso:
thm:woalwaycomparable

Prova. Sejam $\langle A, < \rangle$ e $\langle B, \triangleleft \rangle$ boas ordenações. Usando a Separação, seja

$$f = \{ \langle a, b \rangle \in A \times B : \langle A_a, <_a \rangle \cong \langle B_b, \triangleleft_b \rangle \}.$$

Por **Lema ordinals.11**, $a_1 < a_2$ sse $b_1 \triangleleft b_2$ para todos $\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \in f$. Logo $f: \text{dom}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ é um isomorfismo.

Se $a_2 \in \text{dom}(f)$ e $a_1 < a_2$, então $a_1 \in \text{dom}(f)$ por **Lema ordinals.10**; logo $\text{dom}(f)$ é um segmento inicial de A . Analogamente, $\text{Im}(f)$ é um segmento inicial de B . Por redução ao absurdo, suponha que ambos são segmentos iniciais *próprios*. Então seja a o **membro** $<$ -mínimo de $A \setminus \text{dom}(f)$, de modo que $\text{dom}(f) = A_a$, e seja b o **membro** $\triangleleft$ -mínimo de $B \setminus \text{Im}(f)$, de modo que $\text{Im}(f) = B_b$. Logo $f: A_a \rightarrow B_b$ é um isomorfismo, e portanto $\langle a, b \rangle \in f$, contradição. $\square$

ordinals.5 Construção de Von Neumann dos Ordinais

sth:ordinals:vn:
sec

Teorema ordinals.12 sugere uma ideia. Poderíamos introduzir certos objetos, chamados *tipos de ordem*, para servirem de representantes das boas ordenações. Escrevendo $\text{ord}(A, <)$ para o tipo de ordem da boa ordenação $\langle A, < \rangle$, gostaríamos de garantir os dois princípios seguintes:

$$\begin{aligned} \text{ord}(A, <) &= \text{ord}(B, \triangleleft) \text{ sse } \langle A, < \rangle \cong \langle B, \triangleleft \rangle \\ \text{ord}(A, <) &< \text{ord}(B, \triangleleft) \text{ sse } \langle A, < \rangle \cong \langle B_b, \triangleleft_b \rangle \text{ para algum } b \in B \end{aligned}$$

Além disso, poderíamos esperar introduzir tipos de ordem *como certos conjuntos*, tal como podemos introduzir os números naturais como certos conjuntos.

A forma mais comum de o fazer—e a abordagem que seguiremos—é definir estes tipos de ordem via certos conjuntos bem ordenados *canônicos*. Estes conjuntos canônicos foram introduzidos pela primeira vez por von Neumann:

Definição ordinals.13. O conjunto A é *transitivo* sse $(\forall x \in A)x \subseteq A$. Então A é um *ordinal* sse A é transitivo e bem ordenado por $\in$.

Daqui em diante, usaremos letras gregas para ordinais. Segue-se imediatamente da definição que, se α é um ordinal, então $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ é uma boa ordenação, onde $\in_\alpha = \{ \langle x, y \rangle \in \alpha^2 : x \in y \}$. Assim, abusando um pouco da notação, podemos dizer que o próprio α é uma boa ordenação.

Eis os primeiros ordinais:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$$

Repare que estes são precisamente os primeiros ordinais que encontramos no nosso Axioma do Infinito, isto é, na definição de von Neumann de ω (ver ??). Isto não é coincidência. A definição de von Neumann dos ordinais trata os números naturais como ordinais, mas permite também ordinais transfinitos.

Como sempre, podemos agora perguntar: *são* estes os ordinais? Ou von Neumann deu-nos apenas alguns conjuntos que podemos *tratar* como os ordinais? O tipo de discussões que se podem ter sobre esta questão é semelhante

às que tivemos na ??, ??, ??, e ??, pelo que não insistiremos no ponto. Em vez disso, daqui em diante usaremos “os ordinais” para falar dos “ordinais de von Neumann”.

ordinals.6 Propriedades Básicas dos Ordinais

Observamos que os primeiros ordinais são os números naturais. A razão principal para desenvolver uma teoria dos ordinais é alargar o princípio de indução que vale nos números naturais. Iremos construir isso através duma sucessão de resultados elementares.

sth:ordinals:basic:
sec

Lema ordinals.14. *Todo o membro de um ordinal é um ordinal.*

sth:ordinals:basic:
ordmemberord

Prova. Seja α um ordinal com $b \in \alpha$. Como α é transitivo, $b \subseteq \alpha$. Logo $\in$ bem ordena b pois $\in$ bem ordena α .

Para ver que b é transitivo, suponha $x \in c \in b$. Logo $c \in \alpha$ pois $b \subseteq \alpha$. Outra vez, como α é transitivo, $c \subseteq \alpha$, de modo que $x \in \alpha$. Logo $x, c, b \in \alpha$. Mas $\in$ bem ordena α , logo $\in$ é uma relação transitiva em α por **Proposição ordinals.2**. Logo, como $x \in c \in b$, temos $x \in b$. Generalizando, $c \subseteq b$ $\square$

Corolário ordinals.15. $\alpha = \{\beta \in \alpha : \beta \text{ é um ordinal}\}$, para qualquer ordinal α

sth:ordinals:basic:
ordisetoftsmallerord

Prova. Imediato a partir de **Lema ordinals.14**. $\square$

A ideia grosseira dos dois resultados principais seguintes, **Teorema ordinals.16** e **Teorema ordinals.17**, é que os ordinais eles próprios são bem ordenados por pertença:

Teorema ordinals.16 (Indução Transfinita). *Para qualquer fórmula $\varphi(x)$:*

sth:ordinals:basic:
ordinductionschema

$$\text{se } \exists \alpha \varphi(\alpha), \text{ então } \exists \alpha (\varphi(\alpha) \wedge (\forall \beta \in \alpha) \neg \varphi(\beta))$$

onde os quantificadores exibidos ficam implicitamente restritos a ordinais.

Prova. Suponha $\varphi(\alpha)$, para algum ordinal α . Se $(\forall \beta \in \alpha) \neg \varphi(\beta)$, terminamos. Caso contrário, como α é um ordinal, tem um membro $\in$ -mínimo que verifica φ , e este é um ordinal por **Lema ordinals.14**. $\square$

Repare que podemos exprimir igualmente **Teorema ordinals.16** como o esquema:

$$\text{se } \forall \alpha ((\forall \beta \in \alpha) \varphi(\beta) \rightarrow \varphi(\alpha)), \text{ então } \forall \alpha \varphi(\alpha)$$

tomando simplesmente $\neg \varphi(\alpha)$ no **Teorema ordinals.16**, e depois fazendo manipulações lógicas elementares.

Teorema ordinals.17 (Tricotomia). $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$, para quaisquer ordinais α e β .

sth:ordinals:basic:
ordtrichotomy

Prova. A prova é por dupla indução, isto é, usando **Teorema ordinals.16** duas vezes. Diga-se que x é *comparável* com y sse $x \in y \vee x = y \vee y \in x$.

Para a indução, suponha que todo o ordinal em α é comparável com *todo* o ordinal. Para uma segunda indução, suponha que α é comparável com todo o ordinal em β . Mostraremos que α é comparável com β . Por indução em β , seguirá que α é comparável com todo o ordinal; e por indução em α , *todo* o ordinal é comparável com *todo* o ordinal, como pretendido. Basta supor que $\alpha \notin \beta$ e $\beta \notin \alpha$, e mostrar que $\alpha = \beta$.

Para mostrar que $\alpha \subseteq \beta$, fixe $\gamma \in \alpha$; este é um ordinal por **Lema ordinals.14**. Logo, pela primeira hipótese de indução, γ é comparável com β . Mas se $\gamma = \beta$ ou $\beta \in \gamma$ então $\beta \in \alpha$ (invocando a transitividade de α se necessário), contra a suposição; logo $\gamma \in \beta$. Generalizando, $\alpha \subseteq \beta$.

Raciocínio exatamente análogo, usando a segunda hipótese de indução, mostra que $\beta \subseteq \alpha$. Logo $\alpha = \beta$. $\square$

Assim, por vezes escreveremos $\alpha < \beta$ em vez de $\alpha \in \beta$, já que $\in$ se comporta como relação de ordem. Não há razões profundas para além da familiaridade, e porque é mais fácil escrever $\alpha \leq \beta$ do que $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.²

Eis duas consequências rápidas dos últimos resultados, a primeira das quais põe a nova notação em prática:

*sth:ordinals:basic:
ordordered*

Corolário ordinals.18. *Se $\exists \alpha \varphi(\alpha)$, então $\exists \alpha (\varphi(\alpha) \wedge \forall \beta (\varphi(\beta) \rightarrow \alpha \leq \beta))$. Além disso, para quaisquer ordinais α, β, γ , tanto $\alpha \notin \alpha$ como $\alpha \in \beta \rightarrow \alpha \in \gamma$.*

Prova. Tal como **Proposição ordinals.2**. $\square$

Problema ordinals.3. Complete o raciocínio “exatamente análogo” na prova de **Teorema ordinals.17**.

*sth:ordinals:basic:
corordtransitiveord*

Corolário ordinals.19. *A é um ordinal sse A é um conjunto transitivo de ordinais.*

Prova. Da esquerda para a direita. Por **Lema ordinals.14**. Da direita para a esquerda. Se A é um conjunto transitivo de ordinais, então $\in$ bem ordena A por **Teorema ordinals.16** e **Teorema ordinals.17**. $\square$

Agora, descrevemos **Teorema ordinals.16** e **Teorema ordinals.17** como dizendo que $\in$ bem ordena os ordinais. Contudo, temos de ser *muito cautelosos* com este tipo de afirmação, graças ao resultado seguinte:

*sth:ordinals:basic:
buraliforti*

Teorema ordinals.20 (Paradoxo de Burali-Forti). *Não existe conjunto de todos os ordinais*

²Poderíamos escrever $\alpha \subseteq \beta$; mas isso seria totalmente não convencional.

Prova. Por redução ao absurdo, suponha O o conjunto de todos os ordinais. Se $\alpha \in \beta \in O$, então α é um ordinal, por [Lema ordinals.14](#), logo $\alpha \in O$. Logo O é transitivo, e portanto O é um ordinal por [Corolário ordinals.19](#). Daí $O \in O$, contradizendo [Corolário ordinals.18](#). $\square$

Este resultado deve o nome a [Burali-Forti](#). Mas foi Cantor em 1899—numa carta a Dedekind—quem viu pela primeira vez com clareza a *contradição* em supor que existe um conjunto de todos os ordinais. Como van Heijenoort explica:

O próprio Burali-Forti considerou a contradição como estabelecendo, por *reductio ad absurdum*, o resultado de que a ordenação natural dos ordinais é apenas uma ordenação parcial. ([Heijenoort, 1967](#), p. 105)

Deixando de lado o erro de Burali-Forti, podemos resumir o precedente como segue. Os ordinais são conjuntos que individualmente são bem ordenados por pertença, e coletivamente são bem ordenados por pertença (sem coletivamente constituírem um conjunto).

Para concluir, eis mais propriedades básicas dos ordinais que seguem de [Teorema ordinals.16](#) e [Teorema ordinals.17](#).

Proposição ordinals.21. *Toda a sucessão estritamente descendente de ordinais é finita.*

Prova. Toda a sucessão infinita estritamente descendente de ordinais $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$ não tem membro $\leq$ -mínimo, contradizendo [Teorema ordinals.16](#). $\square$

Proposição ordinals.22. $\alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha$, para quaisquer ordinais α, β .

[sth:ordinals:basic:ordinalsaresubsets](#)

Prova. Se $\alpha \in \beta$, então $\alpha \subseteq \beta$ pois β é transitivo. Analogamente, se $\beta \in \alpha$, então $\beta \subseteq \alpha$. E se $\alpha = \beta$, então $\alpha \subseteq \beta$ e $\beta \subseteq \alpha$. Logo, por [Teorema ordinals.17](#) terminamos. $\square$

Proposição ordinals.23. $\alpha = \beta$ sse $\alpha \cong \beta$, para quaisquer ordinais α, β .

[sth:ordinals:basic:ordisoidentity](#)

Prova. Os ordinais são boas ordenações; logo isto é imediato da Tricotomia ([Teorema ordinals.17](#)) e de [Lema ordinals.9](#). $\square$

Problema ordinals.4. Prove que, se cada membro de X é um ordinal, então $\bigcup X$ é um ordinal.

[sth:ordinals:basic:probunionordinalsordinal](#)

ordinals.7 Substituição

sth:ordinals:replacement:
sec

Na [Seção ordinals.5](#), motivamos a introdução dos ordinais ao sugerir que os poderíamos tratar como tipos de ordem, isto é, como representantes canônicos de boas ordenações. Para que isso funcione, seria preciso provar que *toda a boa ordenação é isomorfa a algum ordinal*. Isso permitiria definir $\text{ord}(A, <)$ como o ordinal α tal que $\langle A, < \rangle \cong \alpha$.

Infelizmente, *não* podemos provar o resultado desejado apenas com os axiomas introduzidos até aqui. (Veremos por que em ??, mas por agora basta: não podemos.) Precisamos de uma ideia nova, e eis-a:

Esquema de Substituição (Esquema de Substituição). Para qualquer fórmula $\varphi(x, y)$, o seguinte é um axioma:

para qualquer A , se $(\forall x \in A) \exists! y \varphi(x, y)$, então $\{y : (\exists x \in A) \varphi(x, y)\}$ existe.

Como na Separação, isto é um esquema: produz infinitamente muitos axiomas, um para cada uma das infinitas φ distintas. E pode igualmente ser (e normalmente é) escrito assim:

Para qualquer fórmula $\varphi(x, y)$ que não contenha “ B ”, o seguinte é um axioma:

$$\forall A[(\forall x \in A) \exists! y \varphi(x, y) \rightarrow \exists B \forall y (y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A) \varphi(x, y))]$$

À primeira vista, contudo, esta é uma fórmula bastante intrincada. A consequência imediata seguinte da Substituição dá provavelmente uma expressão *mais clara* à ideia intuitiva com que trabalhamos:³

Corolário ordinals.24. Para qualquer termo $\tau(x)$, e qualquer conjunto A , este conjunto existe:

$$\{\tau(x) : x \in A\} = \{y : (\exists x \in A) y = \tau(x)\}.$$

Prova. Como τ é um termo, $\forall x \exists! y \tau(x) = y$. *A fortiori*, $(\forall x \in A) \exists! y \tau(x) = y$. Logo $\{y : (\exists x \in A) \tau(x) = y\}$ existe pela Substituição. $\square$

Isto sugere que “Substituição” é um bom nome para o axioma: dado um conjunto A , pode formar um novo conjunto, $\{\tau(x) : x \in A\}$, substituindo cada membro de A pela sua imagem sob τ . De fato, seguindo a notação para

³Um termo é uma expressão que designa exatamente um objeto (em qualquer instânciação das suas variáveis livres). Por exemplo, “ $\emptyset$ ” é um termo que designa o conjunto vazio; “ $\{x\}$ ” é um termo que designa o singular de x (seja qual for x); “ $x \cup y$ ” é um termo que designa a união de x e de y (sejam quais forem).

a imagem de um conjunto sob uma função, poderíamos escrever $\tau[A]$ para $\{\tau(x) : x \in A\}$.

O essencial, porém, é que τ é um *termo*. Não tem de ser (um nome de) uma *função*, no sentido de ??, isto é, um certo conjunto de pares ordenados. Afinal, se f é uma função (nesse sentido), então o conjunto $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$ é apenas um subconjunto particular de $\text{Im}(f)$, e isso já está garantido a existir apenas com os axiomas de $\mathbf{Z}^-$.⁴ A Substituição, em contraste, é um acréscimo *poderoso* aos nossos axiomas, como veremos no ??.

ordinals.8 $\mathbf{ZF}^-$: um marco

A questão de como justificar o Esquema de Substituição (se é que o justificamos) não é linear. Como tal, a reservamos para o ??. No entanto, com a adição da Substituição, atingimos outro marco importante. Dispomos agora de todos os axiomas necessários para a teoria $\mathbf{ZF}^-$. Em detalhe:

sth:ordinals:zfm:
sec

Definição ordinals.25. A teoria $\mathbf{ZF}^-$ tem estes axiomas: Extensionalidade, União, Pares, Conjuntos das Partes, Infinito, e todas as instâncias dos esquemas de Separação e Substituição. Por outras palavras, $\mathbf{ZF}^-$ acrescenta a Substituição a $\mathbf{Z}^-$.

Isto designa a teoria de conjuntos de *Zermelo–Fraenkel* (*menos* algo que veremos mais adiante). Fraenkel recebe a honra, uma vez que lhe é atribuída a formulação da Substituição em 1922, embora a primeira formulação precisa seja devida a Skolem (1922).

ordinals.9 Ordinais como Tipos de Ordem

Armados com a Substituição, e portanto trabalhando agora em $\mathbf{ZF}^-$, podemos finalmente provar o resultado a que vimos aspirando:

sth:ordinals:ordtype:
sec

Teorema ordinals.26. *Toda a boa ordenação é isomorfa a um único ordinal.*

sth:ordinals:ordtype:
thmOrdinalRepresentation

Prova. Seja $\langle A, < \rangle$ uma boa ordenação. Por **Proposição ordinals.23**, é isomorfa no máximo a um ordinal. Logo, por redução ao absurdo, suponha que $\langle A, < \rangle$ não é isomorfa a *nenhum* ordinal. Começaremos por “tornar $\langle A, < \rangle$ o mais pequena possível”. Em detalhe: se algum segmento inicial próprio $\langle A_a, <_a \rangle$ não for isomorfo a nenhum ordinal, existe um $a \in A$ mínimo com essa propriedade; então seja $B = A_a$ e $\leq = <_a$. Caso contrário, seja $B = A$ e $\leq = <$.

Por definição, todo o segmento inicial próprio de B é isomorfo a algum ordinal, que é único como acima. Logo, pela Substituição, o conjunto seguinte existe, e é uma função:

$$f = \{\langle \beta, b \rangle : b \in B \text{ e } \beta \cong \langle B_b, \leq_b \rangle\}$$

⁴Baste considerar $\{y \in \bigcup f : (\exists x \in A)y = f(x)\}$.

Para completar a redução ao absurdo, mostraremos que f é um isomorfismo $\alpha \rightarrow B$, para algum ordinal α .

É óbvio que $\text{Im}(f) = B$. E por **Lema ordinals.11**, f preserva a ordenação, isto é, $\gamma \in \beta$ sse $f(\gamma) < f(\beta)$. Para mostrar que $\text{dom}(f)$ é um ordinal, por **Corolário ordinals.19** basta mostrar que $\text{dom}(f)$ é transitivo. Fixe então $\beta \in \text{dom}(f)$, isto é, $\beta \cong \langle B_b, <_b \rangle$ para algum b . Se $\gamma \in \beta$, então $\gamma \in \text{dom}(f)$ por **Lema ordinals.10**; generalizando, $\beta \subseteq \text{dom}(f)$. $\square$

Este resultado autoriza a definição seguinte, que queríamos apresentar desde **Seção ordinals.5**:

Definição ordinals.27. Se $\langle A, < \rangle$ é uma boa ordenação, então o seu tipo de ordem, $\text{ord}(A, <)$, é o único ordinal α tal que $\langle A, < \rangle \cong \alpha$.

Além disso, esta definição autoriza dois princípios convenientes:

Corolário ordinals.28. Sendo $\langle A, < \rangle$ e $\langle B, < \rangle$ boas ordenações:

$$\begin{aligned} \text{ord}(A, <) &= \text{ord}(B, <) \text{ sse } \langle A, < \rangle \cong \langle B, < \rangle \\ \text{ord}(A, <) &\in \text{ord}(B, <) \text{ sse } \langle A, < \rangle \cong \langle B_b, <_b \rangle \text{ para algum } b \in B \end{aligned}$$

Prova. A identidade vale por **Proposição ordinals.23**. Para provar a segunda afirmação, seja $\text{ord}(A, <) = \alpha$ e $\text{ord}(B, <) = \beta$, e seja $f: \beta \rightarrow \langle B, < \rangle$ o nosso isomorfismo. Então:

$$\begin{aligned} \alpha \in \beta \text{ sse } f \upharpoonright_\alpha: \alpha \rightarrow B_{f(\alpha)} \text{ é um isomorfismo} \\ \text{sse } \langle A, < \rangle \cong \langle B_{f(\alpha)}, <_{f(\alpha)} \rangle \\ \text{sse } \langle A, < \rangle \cong \langle B_b, <_b \rangle \text{ para algum } b \in B \end{aligned}$$

por **Proposição ordinals.7**, **Lema ordinals.10**, e **Corolário ordinals.15**. $\square$

ordinals.10 Ordinais Sucessores e Limites

Nos próximos capítulos, usaremos muito os ordinais. Por isso convém introduzir algumas noções simples.

Definição ordinals.29. Para qualquer ordinal α , o seu *sucessor* é $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$. Dizemos que α é um ordinal *sucessor* se $\beta^+ = \alpha$ para algum ordinal β . Dizemos que α é um ordinal *limite* sse α não é nem vazio nem um ordinal sucessor.

O resultado seguinte mostra que esta é a noção certa de *sucessor*:

Proposição ordinals.30. Para qualquer ordinal α :

1. $\alpha \in \alpha^+$;
2. α^+ é um ordinal;

3. não existe ordinal β tal que $\alpha \in \beta \in \alpha^+$.

Prova. Trivialmente, $\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha^+$. Igualmente, α^+ é um conjunto transitivo de ordinais, e portanto um ordinal por [Corolário ordinals.19](#). E é impossível que $\alpha \in \beta \in \alpha^+$, pois então ou $\beta \in \alpha$ ou $\beta = \alpha$, contradizendo [Corolário ordinals.18](#). $\square$

Isto autoriza também uma variante de prova por indução transfinita:

Teorema ordinals.31 (Indução Transfinita Simples). *Seja $\varphi(x)$ uma fórmula ordinals:ops: simpletransrecursion tal que:*

1. $\varphi(\emptyset)$; e
2. para qualquer ordinal α , se $\varphi(\alpha)$ então $\varphi(\alpha^+)$; e
3. se α é um ordinal limite e $(\forall \beta \in \alpha) \varphi(\beta)$, então $\varphi(\alpha)$.

Então $\forall \alpha \varphi(\alpha)$.

Prova. Provamos a contrapositiva. Logo, suponha que existe algum ordinal para o qual vale $\neg \varphi$; seja γ o menor tal ordinal. Então ou $\gamma = \emptyset$, ou $\gamma = \alpha^+$ para algum α tal que $\varphi(\alpha)$; ou γ é um ordinal limite e $(\forall \beta \in \gamma) \varphi(\beta)$. $\square$

Um último bocado de notação será útil mais adiante:

Definição ordinals.32. Se X é um conjunto de ordinais, então $\text{lsub}(X) = \bigcup_{\alpha \in X} \alpha^+$. sth:ordinals:ops: defsupsstrict

Aqui, “lsub” abrevia “least strict upper bound” (majorante superior estrito mínimo).⁵ O resultado seguinte explica isto:

Proposição ordinals.33. Se X é um conjunto de ordinais, $\text{lsub}(X)$ é o menor ordinal estritamente maior do que todo o ordinal em X .

Prova. Seja $Y = \{\alpha^+ : \alpha \in X\}$, de modo que $\text{lsub}(X) = \bigcup Y$. Como os ordinais são transitivos e todo o membro de um ordinal é um ordinal, $\text{lsub}(X)$ é um conjunto transitivo de ordinais, e portanto um ordinal por [Corolário ordinals.19](#).

Se $\alpha \in X$, então $\alpha^+ \in Y$, logo $\alpha^+ \subseteq \bigcup Y = \text{lsub}(X)$, e portanto $\alpha \in \text{lsub}(X)$. Logo $\text{lsub}(X)$ é estritamente maior do que todo o ordinal em X .

Inversamente, se $\alpha \in \text{lsub}(X)$, então $\alpha \in \beta^+ \in Y$ para algum $\beta \in X$, de modo que $\alpha \leq \beta \in X$. Logo $\text{lsub}(X)$ é o majorante superior estrito mínimo de X . $\square$

⁵Alguns livros usam “sup(X)” para isto. Mas outros usam “sup(X)” para o majorante superior não estrito mínimo, isto é, simplesmente $\bigcup X$. Se X tem um maior elemento, α , estas noções divergem: o majorante superior estrito mínimo é α^+ , enquanto o majorante superior não estrito mínimo é apenas α .

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

- Burali-Forti, Cesare. 1897. Una questione sui numeri transfiniti. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 11: 154–64.
- Fraenkel, Abraham. 1922. Über den Begriff ‘definit’ und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse* 253–257.
- Heijenoort, Jean van. 1967. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Skolem, Thoralf. 1922. Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. In *Wissenschaftliche Vorträge gehalten auf dem fünften Kongress der skandinavischen Mathematiker in Helsingfors vom 4. bis zum 7. Juli 1922*, 137–52. Akademiska Bokhandeln.