

ordinals.1 Propriedades Básicas dos Ordinais

sth:ordinals:basic:
sec

Observamos que os primeiros ordinais são os números naturais. A razão principal para desenvolver uma teoria dos ordinais é alargar o princípio de indução que vale nos números naturais. Iremos construir isso através duma sucessão de resultados elementares.

sth:ordinals:basic:
ordmemberord

Lema ordinals.1. *Todo o **membro** de um ordinal é um ordinal.*

Prova. Seja α um ordinal com $b \in \alpha$. Como α é transitivo, $b \subseteq \alpha$. Logo $\in$ bem ordena b pois $\in$ bem ordena α .

Para ver que b é transitivo, suponha $x \in c \in b$. Logo $c \in \alpha$ pois $b \subseteq \alpha$. Outra vez, como α é transitivo, $c \subseteq \alpha$, de modo que $x \in \alpha$. Logo $x, c, b \in \alpha$. Mas $\in$ bem ordena α , logo $\in$ é uma relação transitiva em α por **??**. Logo, como $x \in c \in b$, temos $x \in b$. Generalizando, $c \subseteq b$ $\square$

sth:ordinals:basic:
ordissetofsmallerord

Corolário ordinals.2. $\alpha = \{\beta \in \alpha : \beta \text{ é um ordinal}\}$, para qualquer ordinal α

Prova. Imediato a partir de **Lema ordinals.1**. $\square$

A ideia grosseira dos dois resultados principais seguintes, **Teorema ordinals.3** e **Teorema ordinals.4**, é que os ordinais eles próprios são bem ordenados por pertença:

sth:ordinals:basic:
ordinductionschema

Teorema ordinals.3 (Indução Transfinita). *Para qualquer fórmula $\varphi(x)$:*

$$\text{se } \exists \alpha \varphi(\alpha), \text{ então } \exists \alpha (\varphi(\alpha) \wedge (\forall \beta \in \alpha) \neg \varphi(\beta))$$

onde os quantificadores exibidos ficam implicitamente restritos a ordinais.

Prova. Suponha $\varphi(\alpha)$, para algum ordinal α . Se $(\forall \beta \in \alpha) \neg \varphi(\beta)$, terminamos. Caso contrário, como α é um ordinal, tem um **membro** $\in$ -mínimo que verifica φ , e este é um ordinal por **Lema ordinals.1**. $\square$

Repare que podemos exprimir igualmente **Teorema ordinals.3** como o esquema:

$$\text{se } \forall \alpha ((\forall \beta \in \alpha) \varphi(\beta) \rightarrow \varphi(\alpha)), \text{ então } \forall \alpha \varphi(\alpha)$$

tomando simplesmente $\neg \varphi(\alpha)$ no **Teorema ordinals.3**, e depois fazendo manipulações lógicas elementares.

sth:ordinals:basic:
ordtrichotomy

Teorema ordinals.4 (Tricotomia). $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha$, para quaisquer ordinais α e β .

Prova. A prova é por dupla indução, isto é, usando **Teorema ordinals.3** duas vezes. Diga-se que x é comparável com y sse $x \in y \vee x = y \vee y \in x$.

Para a indução, suponha que todo o ordinal em α é comparável com *todo* o ordinal. Para uma segunda indução, suponha que α é comparável com todo

o ordinal em β . Mostraremos que α é comparável com β . Por indução em β , seguirá que α é comparável com todo o ordinal; e por indução em α , *tudo* o ordinal é comparável com *tudo* o ordinal, como pretendido. Basta supor que $\alpha \notin \beta$ e $\beta \notin \alpha$, e mostrar que $\alpha = \beta$.

Para mostrar que $\alpha \subseteq \beta$, fixe $\gamma \in \alpha$; este é um ordinal por **Lema ordinals.1**. Logo, pela primeira hipótese de indução, γ é comparável com β . Mas se $\gamma = \beta$ ou $\beta \in \gamma$ então $\beta \in \alpha$ (invocando a transitividade de α se necessário), contra a suposição; logo $\gamma \in \beta$. Generalizando, $\alpha \subseteq \beta$.

Raciocínio exatamente análogo, usando a segunda hipótese de indução, mostra que $\beta \subseteq \alpha$. Logo $\alpha = \beta$. $\square$

Assim, por vezes escreveremos $\alpha < \beta$ em vez de $\alpha \in \beta$, já que $\in$ se comporta como relação de ordem. Não há razões profundas para além da familiaridade, e porque é mais fácil escrever $\alpha \leq \beta$ do que $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.¹

Eis duas consequências rápidas dos últimos resultados, a primeira das quais põe a nova notação em prática:

Corolário ordinals.5. *Se $\exists \alpha \varphi(\alpha)$, então $\exists \alpha (\varphi(\alpha) \wedge \forall \beta (\varphi(\beta) \rightarrow \alpha \leq \beta)$). Além disso, para quaisquer ordinais α, β, γ , tanto $\alpha \notin \alpha$ como $\alpha \in \beta \in \gamma \rightarrow \alpha \in \gamma$.*

*sth:ordinals:basic:
ordordered*

Prova. Tal como ??.

$\square$

Problema ordinals.1. Complete o raciocínio “exatamente análogo” na prova de **Teorema ordinals.4**.

Corolário ordinals.6. *A é um ordinal sse A é um conjunto transitivo de ordinais.*

*sth:ordinals:basic:
corordtransitiveord*

Prova. Da esquerda para a direita. Por **Lema ordinals.1**. Da direita para a esquerda. Se A é um conjunto transitivo de ordinais, então $\in$ bem ordena A por **Teorema ordinals.3** e **Teorema ordinals.4**. $\square$

Agora, descrevemos **Teorema ordinals.3** e **Teorema ordinals.4** como dizendo que $\in$ bem ordena os ordinais. Contudo, temos de ser *muito cautelosos* com este tipo de afirmação, graças ao resultado seguinte:

Teorema ordinals.7 (Paradoxo de Burali-Forti). *Não existe conjunto de todos os ordinais*

*sth:ordinals:basic:
buraliforti*

Prova. Por redução ao absurdo, suponha O o conjunto de todos os ordinais. Se $\alpha \in \beta \in O$, então α é um ordinal, por **Lema ordinals.1**, logo $\alpha \in O$. Logo O é transitivo, e portanto O é um ordinal por **Corolário ordinals.6**. Daí $O \in O$, contradizendo **Corolário ordinals.5**. $\square$

¹Poderíamos escrever $\alpha \subseteq \beta$; mas isso seria totalmente não convencional.

Este resultado deve o nome a [Burali-Forti](#). Mas foi Cantor em 1899—numa carta a Dedekind—quem viu pela primeira vez com clareza a *contradição* em supor que existe um conjunto de todos os ordinais. Como van Heijenoort explica:

O próprio Burali-Forti considerou a contradição como estabelecendo, por *reductio ad absurdum*, o resultado de que a ordenação natural dos ordinais é apenas uma ordenação parcial. ([Heijenoort, 1967](#), p. 105)

Deixando de lado o erro de Burali-Forti, podemos resumir o precedente como segue. Os ordinais são conjuntos que individualmente são bem ordenados por pertença, e coletivamente são bem ordenados por pertença (sem coletivamente constituírem um conjunto).

Para concluir, eis mais propriedades básicas dos ordinais que seguem de [Teorema ordinals.3](#) e [Teorema ordinals.4](#).

Proposição ordinals.8. *Toda a sucessão estritamente descendente de ordinais é finita.*

Prova. Toda a sucessão infinita estritamente descendente de ordinais $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$ não tem membro $<$ -mínimo, contradizendo [Teorema ordinals.3](#). $\square$

[sth:ordinals:basic:
ordinalsaresubsets](#)

Proposição ordinals.9. $\alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha$, para quaisquer ordinais α, β .

Prova. Se $\alpha \in \beta$, então $\alpha \subseteq \beta$ pois β é transitivo. Analogamente, se $\beta \in \alpha$, então $\beta \subseteq \alpha$. E se $\alpha = \beta$, então $\alpha \subseteq \beta$ e $\beta \subseteq \alpha$. Logo, por [Teorema ordinals.4](#) terminamos. $\square$

[sth:ordinals:basic:
ordisoidentity](#)

Proposição ordinals.10. $\alpha = \beta$ sse $\alpha \cong \beta$, para quaisquer ordinais α, β .

Prova. Os ordinais são boas ordenações; logo isto é imediato da Tricotomia ([Teorema ordinals.4](#)) e de ?? $\square$

[sth:ordinals:basic:
probunionordinalsordinal](#)

Problema ordinals.2. Prove que, se cada membro de X é um ordinal, então $\bigcup X$ é um ordinal.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

- Burali-Forti, Cesare. 1897. Una questione sui numeri transfiniti. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 11: 154–64.
- Heijenoort, Jean van. 1967. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Cambridge, MA: Harvard University Press.