

ord-arithmetic.1 Usando Adição Ordinal

Com a adição nos ordinais, podemos calcular explicitamente os postos de vários conjuntos, no sentido de ??:

Lema ord-arithmetic.1. Se $\text{posto}(A) = \alpha$ e $\text{posto}(B) = \beta$, então:

1. $\text{posto}(\wp(A)) = \alpha + 1$
2. $\text{posto}(\{A, B\}) = \max(\alpha, \beta) + 1$
3. $\text{posto}(A \cup B) = \max(\alpha, \beta)$
4. $\text{posto}(\langle A, B \rangle) = \max(\alpha, \beta) + 2$
5. $\text{posto}(A \times B) \leq \max(\alpha, \beta) + 2$
6. $\text{posto}(\bigcup A) = \alpha$ quando α é vazio ou limite; $\text{posto}(\bigcup A) = \gamma$ quando $\alpha = \gamma + 1$

Prova. Ao longo de todo o raciocínio, invocamos repetidamente ??.

(1). Se $x \subseteq A$ então $\text{posto}(x) \leq \text{posto}(A)$. Logo $\text{posto}(\wp(A)) \leq \alpha + 1$. Como em particular $A \in \wp(A)$, tem-se $\text{posto}(\wp(A)) = \alpha + 1$.

(2). Por ??

(3). Por ??.

(4). Por (2), duas vezes.

(5). Note-se que $A \times B \subseteq \wp(\wp(A \cup B))$, e invoque (4).

(6). Se $\alpha = \gamma + 1$, existe algum $c \in A$ com $\text{posto}(c) = \gamma$, e nenhum membro de A tem posto superior; logo $\text{posto}(\bigcup A) = \gamma$. Se α é um ordinal limite, então A tem membros com posto arbitrariamente próximo (mas estritamente inferior) de α , pelo que $\bigcup A$ também tem membros com posto arbitrariamente próximo (mas estritamente inferior) de α , e portanto $\text{posto}(\bigcup A) = \alpha$. $\square$

Deixamos como exercício mostrar por que (5) envolve uma desigualdade.

Problema ord-arithmetic.1. Exiba conjuntos A e B tais que $\text{posto}(A \times B) = \max(\text{posto}(A), \text{posto}(B))$. Exiba conjuntos A e B tais que $\text{posto}(A \times B) = \max(\text{posto}(A), \text{posto}(B)) + 2$. São possíveis outros postos?

Estamos também agora em condições de mostrar que várias noções razoáveis do que possa significar descrever um ordinal como “finito” ou “infinito” coincidem:

Lema ord-arithmetic.2. Para qualquer ordinal α , as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\alpha \notin \omega$, isto é, α não é um número natural
2. $\omega \leq \alpha$
3. $1 + \alpha = \alpha$

4. $\alpha \approx \alpha + 1$, isto é, α e $\alpha + 1$ são equipotentes

*sth:ord-arithmetic:using-addition.
ord:plusone*

5. α é infinito de Dedekind

*sth:ord-arithmetic:using-addition.
ord:infinite*

Temos assim cinco formas provavelmente equivalentes de precisar o que exige que um ordinal seja (in) finito.

Prova. (1) $\Rightarrow$ (2). Por tricotomia.

(2) $\Rightarrow$ (3). Fixe $\alpha \geq \omega$. Por indução transfinita, existe um ordinal γ mínimo (possivelmente 0) tal que existe um ordinal limite β com $\alpha = \beta + \gamma$. Ora:

$$1 + \alpha = 1 + (\beta + \gamma) = (1 + \beta) + \gamma = \text{lsub}_{\delta < \beta} (1 + \delta) + \gamma = \beta + \gamma = \alpha.$$

(3) $\Rightarrow$ (4). Existe claramente uma bijeção $f: (\alpha \sqcup 1) \rightarrow (1 \sqcup \alpha)$. Se $1 + \alpha = \alpha$, existe um isomorfismo $g: (1 \sqcup \alpha) \rightarrow \alpha$. Considere-se $g \circ f$.

(4) $\Rightarrow$ (5). Se $\alpha \approx \alpha + 1$, existe uma bijeção $f: (\alpha \sqcup 1) \rightarrow \alpha$. Defina $g(\gamma) = f(\gamma, 0)$ para cada $\gamma < \alpha$; esta injeção mostra que α é infinito de Dedekind, pois $f(0, 1) \in \alpha \setminus \text{Im}(g)$.

(5) $\Rightarrow$ (1). Isto é ??.

□

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas