

ord-arithmetic.1 Multiplicação Ordinal

sth:ord-arithmetic:mult:
sec

Passamos agora à multiplicação ordinal, abordando-a de forma muito semelhante à adição ordinal. Suponha-se que se pretende multiplicar α por β . Pode imaginar-se uma grelha retangular, com largura α e altura β ; o produto de α e β é então o resultado de percorrer cada linha e depois passar à linha seguinte. . . até percorrer toda a grelha. Dito de outro modo, o produto de α e β obtém-se substituindo *cada* elemento de β por uma cópia de α .

Para formalizar, usa-se simplesmente a ordem lexicográfica inversa no produto cartesiano de α e β :

Definição ord-arithmetic.1. Para quaisquer ordinais α, β , o seu produto $\alpha \cdot \beta = \text{ord}(\alpha \times \beta, \triangleleft)$.

É preciso de novo confirmar que esta definição está bem formada:

sth:ord-arithmetic:mult:
ordtimeslessiswo

Lema ord-arithmetic.2. $\langle \alpha \times \beta, \triangleleft \rangle$ é um bom ordenamento, para quaisquer ordinais α e β .

Prova. Exatamente como para ??.

□

E não é difícil provar que a multiplicação se comporta assim:

sth:ord-arithmetic:mult:
ordtimesrecursion

Lema ord-arithmetic.3. Para quaisquer ordinais α, β :

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= 0 \\ \alpha \cdot (\beta + 1) &= (\alpha \cdot \beta) + \alpha \\ \alpha \cdot \beta &= \text{lsub}_{\delta < \beta}(\alpha \cdot \delta) \end{aligned} \quad \text{quando } \beta \text{ é um ordinal limite.}$$

Prova. Deixado como exercício.

□

De fato, tal como no caso da adição, poderíamos ter definido a multiplicação ordinal por estas equações recursivas, em vez de dar uma definição direta. Tal como na adição, certo comportamento é familiar:

sth:ord-arithmetic:mult:
ordinalmultiplicationisnice

Lema ord-arithmetic.4. Se α, β, γ são ordinais, então:

sth:ord-arithmetic:mult:
ordtimes1

1. se $\alpha \neq 0$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$;

sth:ord-arithmetic:mult:
ordtimes2

2. se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$, então $\beta = \gamma$;

sth:ord-arithmetic:mult:
ordtimes3

3. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$;

sth:ord-arithmetic:mult:
ordtimes4

4. Se $\alpha \leq \beta$, então $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$;

sth:ord-arithmetic:mult:
ordtimes5

5. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$.

Prova. Deixado como exercício.

□

Pode provar-se (ou consultar) outros resultados, à vontade. Mas, dado ??, o que se segue não deve surpreender:

Proposição ord-arithmetic.5. *A multiplicação ordinal não é comutativa: $2 \cdot \omega = \omega < \omega \cdot 2$*

Prova. $2 \cdot \omega = \text{lsub}_{n < \omega}(2 \cdot n) = \omega \in \text{lsub}_{n < \omega}(\omega + n) = \omega + \omega = \omega \cdot 2.$ □

De novo, a justificação intuitiva é direta. Para calcular $2 \cdot \omega$, substitui-se cada número natural por duas entidades. Obtém-se o mesmo tipo de ordem se simplesmente se inserirem todos os números “meios” nos naturais, isto é, se se considerar a ordem natural em $\{n/2 : n \in \omega\}$. Assim posto, o tipo de ordem é claramente o mesmo que o de ω em si. Mas, para calcular $\omega \cdot 2$, dispõem-se duas cópias de ω , uma a seguir à outra.

Problema ord-arithmetic.1. Prove [Lema ord-arithmetic.2](#), [Lema ord-arithmetic.3](#), e [Lema ord-arithmetic.4](#)

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas