

ord-arithmetic.1 Exponenciação Ordinal

sth:ord-arithmetic:expo:
sec

Passamos agora à exponenciação ordinal. Infelizmente, não há uma definição *simpática* sintética para a exponenciação ordinal.

Certo que *existem* definições sintéticas explícitas. Eis uma. Seja $\text{finfun}(\alpha, \beta)$ o conjunto de todas as funções $f: \alpha \rightarrow \beta$ tais que $\{\gamma \in \alpha : f(\gamma) \neq 0\}$ é equipotente a algum número natural. Defina-se um bom ordenamento em $\text{finfun}(\alpha, \beta)$ por $f \sqsubset g$ sse $f \neq g$ e $f(\gamma_0) < g(\gamma_0)$, onde $\gamma_0 = \max\{\gamma \in \alpha : f(\gamma) \neq g(\gamma)\}$. Então pode definir-se $\alpha^{(\beta)}$ como $\text{ord}(\text{finfun}(\alpha, \beta), \sqsubset)$. Potter usa esta definição explícita e explica de seguida:

A escolha desta ordenação determina-se unicamente pelo desejo de obter uma definição da exponenciação ordinal que obedeça à condição recursiva adequada. . . , e é muito mais difícil de visualizar do que a soma ou o produto ordenados. (Potter, 2004, p. 199)

Exatamente. Explicamos a adição como “uma cópia de α seguida de uma cópia de β ”, e a multiplicação como “uma β -sucessão de cópias de α ”. Mas não temos nada de sucinto a dizer sobre $\text{finfun}(\alpha, \gamma)$. Por isso, apresentaremos a definição da exponenciação ordinal apenas *por* recursão transfinita, isto é:

sth:ord-arithmetic:expo:
ordexporeursion

Definição ord-arithmetic.1.

$$\begin{aligned}\alpha^{(0)} &= 1 \\ \alpha^{(\beta+1)} &= \alpha^{(\beta)} \cdot \alpha \\ \alpha^{(\beta)} &= \bigcup_{\delta < \beta} \alpha^{(\delta)} \quad \text{quando } \beta \text{ é um ordinal limite}\end{aligned}$$

Se trabalhássemos *como* teóricos de conjuntos, poderíamos querer explorar algumas propriedades da exponenciação ordinal. Mas pouco mais temos a acrescentar, salvo notar o fato pouco surpreendente de que a exponenciação ordinal não comuta. Assim $2^{(\omega)} = \bigcup_{\delta < \omega} 2^{(\delta)} = \omega$, enquanto $\omega^{(2)} = \omega \cdot \omega$. Mas então não se deve *esperar* que comute, pois já não comuta nos naturais: $2^{(3)} = 8 < 9 = 3^{(2)}$.

Problema ord-arithmetic.1. Usando indução transfinita, prove que, se se define $\alpha^{(\beta)} = \text{ord}(\text{finfun}(\alpha, \beta), \sqsubset)$, obtêm-se as equações recursivas de **Definição ord-arithmetic.1**.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Potter, Michael. 2004. *Set Theory and its Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.