

choice.1 O Problema da Boa Ordenação

sth:choice:woproblem:
sec

Evidentemente que muito depende de aceitarmos ou não a Boa Ordenação. Mas a discussão deste princípio tendeu a concentrar-se num equivalente, o Axioma da Escolha. Voltemos então a atenção para esse axioma (e provemos a equivalência).

Em 1883, Cantor exprimiu o seu apoio ao Axioma da Boa Ordenação, chamando-lhe “uma lei do pensamento que me parece fundamental, rica nas suas consequências e particularmente notável pela sua generalidade” (citado em Potter 2004, p. 243). Mas Cantor acabou por convencer-se de que o “Axioma” precisava de prova. A comunidade matemática também.

O problema foi “resolvido” por Zermelo em 1904. Para explicar a solução, precisamos de algumas definições.

Definição choice.1. Uma função f é uma *função de escolha* sse $f(x) \in x$ para todo o $x \in \text{dom}(f)$. Dizemos que f é uma *função de escolha para A* sse f é uma função de escolha com $\text{dom}(f) = A \setminus \{\emptyset\}$.

Intuitivamente, para cada conjunto (não vazio) $x \in A$, uma função de escolha para A *escolhe* um elemento particular, $f(x)$, de x . O Axioma da Escolha é então:

Escolha (Escolha). Todo o conjunto tem uma função de escolha.

Zermelo mostrou que a Escolha implica a boa ordenação, e vice-versa:

sth:choice:woproblem:
thmwochoice

Teorema choice.2 (em ZF). *A Boa Ordenação e a Escolha são equivalentes.*

Prova. Da esquerda para a direita. Seja A um conjunto de conjuntos. Então $\bigcup A$ existe pelo Axioma da União, e logo, pela Boa Ordenação, existe alguma relação $<$ que bem ordena $\bigcup A$. Seja agora $f(x) =$ o membro $<$ -mínimo de x . Isto é uma função de escolha para A .

Da direita para a esquerda. Fixe-se A . Pela Escolha, existe uma função de escolha, f , para $\wp(A) \setminus \{\emptyset\}$. Usando Recursão Transfinita, defina-se uma função:

$$g(0) = f(A)$$
$$g(\alpha) = \begin{cases} \text{parar!} & \text{se } A = g[\alpha] \\ f(A \setminus g[\alpha]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A indicação “parar!” é apenas uma abreviatura para o que seria de outro modo uma definição mais longa. Ou seja, quando $A = g[\alpha]$ pela primeira vez, seja $g(\delta) = A$ para todo o $\delta \leq \alpha$. Agora, em primeiro lugar, só podemos ter a certeza de que isto define um *termo* (ver as observações após ??); mas mostraremos que de fato temos uma função.

Como f é função de escolha, para cada α (quando definido) temos $g(\alpha) = f(A \setminus g[\alpha]) \in A \setminus g[\alpha]$; isto é, $g(\alpha) \notin g[\alpha]$. Logo, se $g(\alpha) = g(\beta)$ então $g(\beta) \notin g[\alpha]$, isto é, $\beta \notin \alpha$, e analogamente $\alpha \notin \beta$. Logo $\alpha = \beta$, por Tricotomia. Assim, g é **injetiva**.

Observe-se a seguir que de fato paramos!, isto é, que existe algum ordinal mínimo α tal que $A = g[\alpha]$. De fato, suponhamos o contrário; então, como g é **injetiva**, teríamos $\alpha \prec \wp(A) \setminus \{\emptyset\}$ para todo o ordinal α , contradizendo **??**. Daí também $\text{Im}(g) = A$.

Reunindo estes fatos, g é **uma bijeção** de algum ordinal para A . Agora, g pode ser usada para bem ordenar A . $\square$

Assim, a Boa Ordenação e a Escolha estão de pé ou caem juntas. Mas a questão permanece: estão de pé ou caem?

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

- Cantor, Georg. 1883. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. Leipzig: Teubner.
- Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Craig G. Fraser, and Akihiro Kanamori. 2010. *Ernst Zermelo. Collected Works*, vol. 1. Berlin: Springer-Verlag.
- Potter, Michael. 2004. *Set Theory and its Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.
- Zermelo, Ernst. 1904. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Mathematische Annalen* 59: 514–516. English translation in (**Ebbinghaus et al.**, 2010, pp. 115–119).