

choice.1 O Truque de Tarski–Scott

sth:choice:tarskiscott:
sec

Na ??, definimos cardinais como ordinais. Para isso, assumimos o Axioma da Boa Ordenação. Fizemo-lo apenas porque é o “padrão da indústria”.

Antes de discutir questões filosóficas em torno da Boa Ordenação, importa deixar claro que *podemos* afastar-nos desse padrão e desenvolver uma teoria de cardinais *sem* assumir a Boa Ordenação. Continuamos a poder usar as definições de $A \approx B$, $A \preceq B$ e $A \prec B$, tal como apareceram no ??. Só precisamos de uma nova noção de *cardinal*.

Uma ideia ingênua seria tentar definir a cardinalidade de A assim:

$$\{x : A \approx x\}.$$

Talvez queira comparar isto com a definição fregeana de $\#xFx$, esboçada no final de ??. E, pelas razões que ali adumbramos, esta definição falha. Qualquer conjunto singular é equipotente com $\{\emptyset\}$. Mas novos singulares são formados em cada estágio sucessor da hierarquia (basta considerar o singular do estágio anterior). Logo $\{x : A \approx x\}$ não existe, pois não pode ter posto.

Para contornar o problema, usamos um truque devido a Tarski e Scott:¹

Definição choice.1 (Tarski–Scott). Para qualquer fórmula $\varphi(x)$, seja $[x : \varphi(x)]$ o conjunto de todos os x , de posto mínimo possível, tais que $\varphi(x)$ (ou $\emptyset$, se não houver φ s).

Devemos verificar que esta definição é legítima. Trabalhando em **ZF**, ?? garante que $\text{posto}(x)$ existe para todo o x . Agora, se houver entidades que satisfazem φ , podemos deixar α ser o posto mínimo tal que $(\exists x \subseteq V_\alpha)\varphi(x)$, isto é, $(\forall \beta \in \alpha)(\forall x \subseteq V_\beta)\neg\varphi(x)$. Podemos então definir $[x : \varphi(x)]$ por Separação como $\{x \in V_{\alpha+1} : \varphi(x)\}$.

Tendo justificado o truque de Tarski–Scott, podemos usá-lo para definir uma noção de cardinalidade:

Definição choice.2. A TS-cardinalidade de A é $\text{tsc}(A) = [x : A \approx x]$.

A definição de TS-cardinal não usa a Boa Ordenação. Mas, mesmo sem esse Axioma, podemos mostrar que os TS-*cardinais* se comportam de modo semelhante aos *cardinais* tal como definidos na ??. Por exemplo, se reformularmos ?? e ?? em termos de TS-cardinais, as provas funcionam em **ZF**, sem assumir a Boa Ordenação.

Enquanto estamos no assunto, vale a pena notar que também podemos desenvolver uma teoria de ordinais usando o truque de Tarski–Scott. Onde $\langle A, < \rangle$ é uma boa ordenação, seja $\text{tso}(A, <) = [\langle X, R \rangle : \langle A, < \rangle \cong \langle X, R \rangle]$. Para mais sobre este tratamento de cardinais e ordinais, ver [Potter \(2004, chs. 9–12\)](#).

¹Lembrete: todas as fórmulas podem ter parâmetros (salvo indicação em contrário).

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Potter, Michael. 2004. *Set Theory and its Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.