

choice.1 Comparabilidade e Lema de Hartogs

sth:choice:hartogs:sec Isto é o lado positivo. Eis o lado negativo. Sem Escolha, as coisas ficam complicadas. Para ver por que, eis um belo resultado devido a [Hartogs \(1915\)](#):

sth:choice:hartogs:HartogsLemma **Lema choice.1 (em ZF).** Para qualquer conjunto A , existe um ordinal α tal que $\alpha \not\preceq A$

Prova. Se $B \subseteq A$ e $R \subseteq B^2$, então $\langle B, R \rangle \subseteq V_{\text{posto}(A)+4}$ por **??**. Logo, usando Separação, considere-se:

$$C = \{\langle B, R \rangle \in V_{\text{posto}(A)+5} : B \subseteq A \text{ e } \langle B, R \rangle \text{ é uma boa ordenação}\}$$

Usando Substituição e **??**, forme-se o conjunto:

$$\alpha = \{\text{ord}(B, R) : \langle B, R \rangle \in C\}.$$

Por **??**, α é um ordinal, pois é um conjunto transitivo de ordinais. De fato, se $\gamma \in \beta \in \alpha$, então $\beta = \text{ord}(B, R)$ para algum $B \subseteq R$, donde $\gamma = \text{ord}(B_b, R_b)$ para algum $b \in B$ por **??**, logo $\gamma \in \alpha$.

Por redução ao absurdo, suponhamos que existe uma injeção $f: \alpha \rightarrow A$. Então, onde:

$$\begin{aligned} B &= \text{Im}(f) \\ R &= \{\langle f(\alpha), f(\beta) \rangle \in A \times A : \alpha \in \beta\}. \end{aligned}$$

Claramente $\alpha = \text{ord}(B, R)$ e $\langle B, R \rangle \in C$. Logo $\alpha \in \alpha$, o que é contradição. $\square$

Isto implica um resultado profundo:

Teorema choice.2 (em ZF). As afirmações seguintes são equivalentes:

- sth:choice:hartogs:equivwo 1. O Axioma da Boa Ordenação
- sth:choice:hartogs:equivcompare 2. Ou $A \preceq B$ ou $B \preceq A$, para quaisquer conjuntos A e B

Prova. (1) $\Rightarrow$ (2). Fixem-se A e B . Invocando (1), existem boas ordenações $\langle A, R \rangle$ e $\langle B, S \rangle$. Invocando **??**, sejam $f: \alpha \rightarrow \langle A, R \rangle$ e $g: \beta \rightarrow \langle B, S \rangle$ isomorfismos. Por **??**, ou $\alpha \subseteq \beta$ ou $\beta \subseteq \alpha$. Se $\alpha \subseteq \beta$, então $g \circ f^{-1}: A \rightarrow B$ é uma injeção, logo $A \preceq B$; analogamente, se $\beta \subseteq \alpha$ então $B \preceq A$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Fixe-se A ; por **Lema choice.1** existe algum ordinal β tal que $\beta \not\preceq A$. Invocando (2), temos $A \preceq \beta$. Logo existe alguma injeção $f: A \rightarrow \beta$, e podemos usar esta injeção para bem ordenar os elementos de A , definindo uma ordem $\{\langle a, b \rangle \in A \times A : f(a) \in f(b)\}$. $\square$

Como consequência imediata: se a Boa Ordenação falha, então alguns conjuntos são *literalmente incomparáveis* quanto ao tamanho. Assim, se a Boa Ordenação falha, a aritmética cardinal transfinita ficará complicada. Por exemplo, teremos de abandonar a ideia de que, se A e B são infinitos, então

$A \sqcup B \approx A \times B \approx M$, onde M é o maior de A e B (ver ??). O problema é simples: se não podemos *comparar* o tamanho de A e B , então não faz sentido perguntar qual é o maior.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Hartogs, Friedrich. 1915. Über das Problem der Wohlordnung. *Mathematische Annalen* 76: 438–43.