

Capítulo udf

Escolha

choice.1 Introdução

sth:choice:intro:
sec

Em ??–??, desenvolvemos uma teoria de cardinais tratando os cardinais como ordinais. Essa abordagem depende do Axioma da Boa Ordenação. Verifica-se que a Boa Ordenação é equivalente a outro princípio—o Axioma da Escolha—e houve discussão filosófica séria sobre a sua aceitabilidade. As questões deste capítulo são: Como é que o Axioma é usado, e pode ser justificado?

choice.2 O Truque de Tarski–Scott

sth:choice:tarskiscott:
sec

Na ??, definimos cardinais como ordinais. Para isso, assumimos o Axioma da Boa Ordenação. Fizemo-lo apenas porque é o “padrão da indústria”.

Antes de discutir questões filosóficas em torno da Boa Ordenação, importa deixar claro que *podemos* afastar-nos desse padrão e desenvolver uma teoria de cardinais *sem* assumir a Boa Ordenação. Continuamos a poder usar as definições de $A \approx B$, $A \preceq B$ e $A \prec B$, tal como apareceram no ??. Só precisamos de uma nova noção de *cardinal*.

Uma ideia ingênua seria tentar definir a cardinalidade de A assim:

$$\{x : A \approx x\}.$$

Talvez queira comparar isto com a definição fregeana de $\#xFx$, esboçada no final de ??. E, pelas razões que ali adumbramos, esta definição falha. Qualquer conjunto singular é equipotente com $\{\emptyset\}$. Mas novos singulares são formados em cada estágio sucessor da hierarquia (basta considerar o singular do estágio anterior). Logo $\{x : A \approx x\}$ não existe, pois não pode ter posto.

Para contornar o problema, usamos um truque devido a Tarski e Scott:¹

Definição choice.1 (Tarski–Scott). Para qualquer fórmula $\varphi(x)$, seja $[x : \varphi(x)]$ o conjunto de todos os x , de posto mínimo possível, tais que $\varphi(x)$ (ou $\emptyset$, se não houver φ s).

¹Lembrete: todas as fórmulas podem ter parâmetros (salvo indicação em contrário).

Devemos verificar que esta definição é legítima. Trabalhando em **ZF**, ?? garante que $\text{posto}(x)$ existe para todo o x . Agora, se houver entidades que satisfazem φ , podemos deixar α ser o posto mínimo tal que $(\exists x \subseteq V_\alpha)\varphi(x)$, isto é, $(\forall \beta \in \alpha)(\forall x \subseteq V_\beta)\neg\varphi(x)$. Podemos então definir $[x : \varphi(x)]$ por Separação como $\{x \in V_{\alpha+1} : \varphi(x)\}$.

Tendo justificado o truque de Tarski–Scott, podemos usá-lo para definir uma noção de cardinalidade:

Definição choice.2. A TS-cardinalidade de A é $\text{tsc}(A) = [x : A \approx x]$.

A definição de TS-cardinal não usa a Boa Ordenação. Mas, mesmo sem esse Axioma, podemos mostrar que os TS-*cardinals* se comportam de modo semelhante aos *cardinals* tal como definidos na ???. Por exemplo, se reformularmos ??? e ?? em termos de TS-cardinais, as provas funcionam em **ZF**, sem assumir a Boa Ordenação.

Enquanto estamos no assunto, vale a pena notar que também podemos desenvolver uma teoria de ordinais usando o truque de Tarski–Scott. Onde $\langle A, < \rangle$ é uma boa ordenação, seja $\text{tso}(A, <) = [\langle X, R \rangle : \langle A, < \rangle \cong \langle X, R \rangle]$. Para mais sobre este tratamento de cardinais e ordinais, ver [Potter \(2004, chs. 9–12\)](#).

choice.3 Comparabilidade e Lema de Hartogs

Isto é o lado positivo. Eis o lado negativo. Sem Escolha, as coisas ficam *complicadas*. Para ver por que, eis um belo resultado devido a [Hartogs \(1915\)](#): sth:choice:hartogs:sec

Lema choice.3 (em ZF). *Para qualquer conjunto A , existe um ordinal α tal que $\alpha \not\subseteq A$* sth:choice:hartogs:HartogsLemma

Prova. Se $B \subseteq A$ e $R \subseteq B^2$, então $\langle B, R \rangle \subseteq V_{\text{posto}(A)+4}$ por ???. Logo, usando Separação, considere-se:

$$C = \{\langle B, R \rangle \in V_{\text{posto}(A)+5} : B \subseteq A \text{ e } \langle B, R \rangle \text{ é uma boa ordenação}\}$$

Usando Substituição e ??, forme-se o conjunto:

$$\alpha = \{\text{ord}(B, R) : \langle B, R \rangle \in C\}.$$

Por ??, α é um ordinal, pois é um conjunto transitivo de ordinais. De fato, se $\gamma \in \beta \in \alpha$, então $\beta = \text{ord}(B, R)$ para algum $B \subseteq R$, donde $\gamma = \text{ord}(B_b, R_b)$ para algum $b \in B$ por ??, logo $\gamma \in \alpha$.

Por redução ao absurdo, suponhamos que existe [uma injeção](#) $f: \alpha \rightarrow A$. Então, onde:

$$\begin{aligned} B &= \text{Im}(f) \\ R &= \{\langle f(\alpha), f(\beta) \rangle \in A \times A : \alpha \in \beta\}. \end{aligned}$$

Claramente $\alpha = \text{ord}(B, R)$ e $\langle B, R \rangle \in C$. Logo $\alpha \in \alpha$, o que é contradição. $\square$

Isto implica um resultado profundo:

Teorema choice.4 (em ZF). *As afirmações seguintes são equivalentes:*

sth:choice:hartogs:
equivwo
sth:choice:hartogs:
equivcompare

1. O Axioma da Boa Ordenação
2. Ou $A \preceq B$ ou $B \preceq A$, para quaisquer conjuntos A e B

Prova. (1) $\Rightarrow$ (2). Fixem-se A e B . Invocando (1), existem boas ordenações $\langle A, R \rangle$ e $\langle B, S \rangle$. Invocando ??, sejam $f: \alpha \rightarrow \langle A, R \rangle$ e $g: \beta \rightarrow \langle B, S \rangle$ isomorfismos. Por ??, ou $\alpha \subseteq \beta$ ou $\beta \subseteq \alpha$. Se $\alpha \subseteq \beta$, então $g \circ f^{-1}: A \rightarrow B$ é uma injeção, logo $A \preceq B$; analogamente, se $\beta \subseteq \alpha$ então $B \preceq A$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Fixe-se A ; por Lema choice.3 existe algum ordinal β tal que $\beta \not\preceq A$. Invocando (2), temos $A \preceq \beta$. Logo existe alguma injeção $f: A \rightarrow \beta$, e podemos usar esta injeção para bem ordenar os elementos de A , definindo uma ordem $\{ \langle a, b \rangle \in A \times A : f(a) \in f(b) \}$. $\square$

Como consequência imediata: se a Boa Ordenação falha, então alguns conjuntos são *literalmente incomparáveis* quanto ao tamanho. Assim, se a Boa Ordenação falha, a aritmética cardinal transfinita ficará complicada. Por exemplo, teremos de abandonar a ideia de que, se A e B são infinitos, então $A \sqcup B \approx A \times B \approx M$, onde M é o maior de A e B (ver ??). O problema é simples: se não podemos *comparar* o tamanho de A e B , então não faz sentido perguntar qual é o maior.

choice.4 O Problema da Boa Ordenação

sth:choice:woproblem:
sec

Evidentemente que muito depende de aceitarmos ou não a Boa Ordenação. Mas a discussão deste princípio tendeu a concentrar-se num equivalente, o Axioma da Escolha. Voltemos então a atenção para esse axioma (e provemos a equivalência).

Em 1883, Cantor exprimiu o seu apoio ao Axioma da Boa Ordenação, chamando-lhe “uma lei do pensamento que me parece fundamental, rica nas suas consequências e particularmente notável pela sua generalidade” (citado em Potter 2004, p. 243). Mas Cantor acabou por convencer-se de que o “Axioma” precisava de prova. A comunidade matemática também.

O problema foi “resolvido” por Zermelo em 1904. Para explicar a solução, precisamos de algumas definições.

Definição choice.5. Uma função f é uma *função de escolha* sse $f(x) \in x$ para todo o $x \in \text{dom}(f)$. Dizemos que f é uma *função de escolha para A* sse f é uma função de escolha com $\text{dom}(f) = A \setminus \{\emptyset\}$.

Intuitivamente, para cada conjunto (não vazio) $x \in A$, uma função de escolha para A *escolhe* um elemento particular, $f(x)$, de x . O Axioma da Escolha é então:

Escolha (Escolha). Todo o conjunto tem uma função de escolha.

Zermelo mostrou que a Escolha implica a boa ordenação, e vice-versa:

Teorema choice.6 (em ZF). *A Boa Ordenação e a Escolha são equivalentes.*

[sth:choice:woproblem:](#)
[thmwochoice](#)

Prova. Da esquerda para a direita. Seja A um conjunto de conjuntos. Então $\bigcup A$ existe pelo Axioma da União, e logo, pela Boa Ordenação, existe alguma relação $<$ que bem ordena $\bigcup A$. Seja agora $f(x) =$ o membro $<$ -mínimo de x . Isto é uma função de escolha para A .

Da direita para a esquerda. Fixe-se A . Pela Escolha, existe uma função de escolha, f , para $\wp(A) \setminus \{\emptyset\}$. Usando Recursão Transfinita, defina-se uma função:

$$g(0) = f(A)$$

$$g(\alpha) = \begin{cases} \text{parar!} & \text{se } A = g[\alpha] \\ f(A \setminus g[\alpha]) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A indicação “parar!” é apenas uma abreviatura para o que seria de outro modo uma definição mais longa. Ou seja, quando $A = g[\alpha]$ pela primeira vez, seja $g(\delta) = A$ para todo o $\delta \leq \alpha$. Agora, em primeiro lugar, só podemos ter a certeza de que isto define um *termo* (ver as observações após ??); mas mostraremos que de fato temos uma função.

Como f é função de escolha, para cada α (quando definido) temos $g(\alpha) = f(A \setminus g[\alpha]) \in A \setminus g[\alpha]$; isto é, $g(\alpha) \notin g[\alpha]$. Logo, se $g(\alpha) = g(\beta)$ então $g(\beta) \notin g[\alpha]$, isto é, $\beta \notin \alpha$, e analogamente $\alpha \notin \beta$. Logo $\alpha = \beta$, por Tricotomia. Assim, g é **injetiva**.

Observe-se a seguir que de fato paramos!, isto é, que existe algum ordinal mínimo α tal que $A = g[\alpha]$. De fato, suponhamos o contrário; então, como g é **injetiva**, teríamos $\alpha \prec \wp(A) \setminus \{\emptyset\}$ para todo o ordinal α , contradizendo **Lema choice.3**. Daí também $\text{Im}(g) = A$.

Reunindo estes fatos, g é **uma bijeção** de algum ordinal para A . Agora, g pode ser usada para bem ordenar A . $\square$

Assim, a Boa Ordenação e a Escolha estão de pé ou caem juntas. Mas a questão permanece: estão de pé ou caem?

choice.5 Escolha Enumerável

É fácil provar, sem usar Escolha/Boa Ordenação, que:

[sth:choice:countablechoice:](#)
[sec](#)

Lema choice.7 (em $\mathbf{Z}^-$). *Todo o conjunto finito tem uma função de escolha.*

Prova. Seja $a = \{b_1, \dots, b_n\}$. Suponhamos, por simplicidade, que cada $b_i \neq \emptyset$. Logo existem objetos $c_1, \dots, c_n$ tais que $c_1 \in b_1, \dots, c_n \in b_n$. Agora, por ??, o conjunto $\{\langle b_1, c_1 \rangle, \dots, \langle b_n, c_n \rangle\}$ existe; e isto é uma função de escolha para a . $\square$

Mas a situação complica-se logo que consideramos conjuntos infinitos. Por exemplo, considere-se esta extensão “mínima” do resultado acima:

Escolha Enumerável. Todo o conjunto *enumerável* tem uma função de escolha.

Isto é um caso particular da Escolha. E verifica-se que este princípio foi invocado com alguma frequência, sem uma consciência óbvia do seu uso. Eis dois bons exemplos.²

Exemplo choice.8. Eis um pensamento natural: para qualquer conjunto A , ou $\omega \preceq A$, ou $A \approx n$ para algum $n \in \omega$. Esta é uma maneira de exprimir a ideia intuitiva de que todo o conjunto é finito ou infinito. Cantor, e muitos outros matemáticos, fizeram esta afirmação sem a provar. Com a cautela que nos caracteriza, a provamos em ???. Mas nessa prova estávamos a trabalhar em **ZFC**, pois assumíamos que qualquer conjunto A pode ser bem ordenado, e logo que $|A|$ está garantidamente definido. Ou seja: assumimos explicitamente a Escolha.

De fato, [Dedekind \(1888\)](#) ofereceu a sua própria prova desta afirmação, do seguinte modo:

Teorema choice.9 (em $\mathbf{Z}^- + \text{Escolha Enumerável}$). *Para qualquer A , ou $\omega \preceq A$ ou $A \approx n$ para algum $n \in \omega$.*

Prova. Suponhamos $A \not\approx n$ para todo o $n \in \omega$. Então, em particular, para cada $n < \omega$ existe um subconjunto $A_n \subseteq A$ com exatamente 2^n elementos. Usando esta sequência $A_0, A_1, A_2, \dots$, definimos para cada n :

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i < n} A_i.$$

Note-se o seguinte

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i < n} A_n \right| &\leq |A_0| + |A_1| + \dots + |A_{n-1}| \\ &= 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} \\ &= 2^n - 1 \\ &< 2^n = |A_n| \end{aligned}$$

Logo cada B_n tem pelo menos um membro, c_n . Além disso, os B_n são dois a dois disjuntos; assim, se $c_n = c_m$ então $n = m$. Mas cada $c_n \in A$. Logo a função $f(n) = c_n$ é uma injeção $\omega \rightarrow A$. $\square$

²Devidos a [Potter \(2004, §9.4\)](#) e Luca Incurvati.

Dedekind não assinalou que tinha usado a Escolha Enumerável. Mas reparou o leitor no seu uso? Olhe de novo. (De fato: *olhe de novo*.)

A prova usou a Escolha Enumerável duas vezes. A usamos uma vez, para obter a nossa sequência de conjuntos $A_0, A_1, A_2, \dots$. Voltamos a usá-la para seleccionar os elementos c_n de cada B_n . Além disso, este uso da Escolha é irreduzível. Cohen (1966, p. 138) provou que o resultado falha se não tivermos qualquer versão da Escolha. Ou seja: é consistente com **ZF** que existam conjuntos *incomparáveis* com ω .

Exemplo choice.10. Em 1878, Cantor afirmou que uma união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Não apresentou prova, talvez por considerar a prova óbvia. Agora, com a nossa cautela, provamos uma versão mais geral deste resultado em ???. Mas a nossa prova assumiu explicitamente a Escolha. E mesmo a prova do resultado menos geral requer a Escolha Enumerável.

Teorema choice.11 (em $\mathbf{Z}^- + \text{Escolha Enumerável}$). *Se A_n é enumerável para cada $n \in \omega$, então $\bigcup_{n < \omega} A_n$ é enumerável.*

Prova. Sem perda de generalidade, suponhamos que cada $A_n \neq \emptyset$. Logo, para cada $n \in \omega$ existe uma sobrejeção $f_n: \omega \rightarrow A_n$. Defina-se $f: \omega \times \omega \rightarrow \bigcup_{n < \omega} A_n$ por $f(m, n) = f_n(m)$. O resultado segue porque $\omega \times \omega$ é enumerável (??) e f é uma sobrejeção. $\square$

Notou o uso da Escolha Enumerável? Serve para escolher a nossa sequência de funções $f_0, f_1, f_2, \dots$.³ E, de novo, o resultado falha na ausência de qualquer princípio de Escolha. Especificamente, Feferman and Levy (1963) provou que é consistente com **ZF** que uma união enumerável de conjuntos enumeráveis tenha cardinalidade $\beth_1$. Mas eis uma formulação bem mais divertida do ponto, de Russell:

Isto ilustra-se com o milionário que comprava um par de meias sempre que comprava um par de botas, e nunca noutra ocasião, e que tinha tal paixão por comprar ambos que acabou por ter $\aleph_0$ pares de botas e $\aleph_0$ pares de meias. . . Nas botas podemos distinguir direita e esquerda, e portanto podemos fazer uma seleção de uma em cada par, nomeadamente, podemos escolher todas as botas direitas ou todas as esquerdas; mas com as meias não se impõe qualquer princípio de seleção, e não podemos ter a certeza, a menos que assumamos o axioma multiplicativo [isto é, em efeito, a Escolha], de que existe alguma classe constituída por uma meia de cada par. (Russell, 1919, p. 126)

Em suma, alguma forma de Escolha é necessária para provar o seguinte: se tem uma quantidade enumerável de pares de meias, então tem (apenas) uma quantidade enumerável de meias. E, de fato, sem a Escolha Enumerável (ou

³Um uso semelhante da Escolha ocorreu em ??, quando demos a instrução “Para cada $\beta \in \mathfrak{a}$, fixe uma injeção f_β ”.

algo equivalente), uma união enumerável de conjuntos enumeráveis pode deixar de ser enumerável.

A moral é que a Escolha Enumerável foi usada repetidamente, sem grande consciência por parte de quem a usava. A questão filosófica é: como poderíamos *justificar* a Escolha Enumerável?

Uma tentativa de justificação intuitiva poderia apelar a uma super-tarefa. Suponhamos que fazemos a primeira escolha em $1/2$ minuto, a segunda em $1/4$ minuto, ..., a n -ésima em $1/2^n$ minuto, ... Então, dentro de 1 minuto, teremos feito uma ω -sequência de escolhas, e definido uma função de escolha.

Mas que poderia realmente dizer-nos um tal experimento mental? Para começar, depende de tomar a ideia de “escolher” de modo bastante literal. Para além disso, parece atar a matemática a possibilidades metafísicas.

Mais importante: não nos dará justificação para a Escolha *sem reservas*, em vez da *mera* Escolha Enumerável. Porque, se precisarmos que *todo* o conjunto tenha função de escolha, então precisaremos de poder realizar uma “super-tarefa de comprimento ordinal arbitrário.” Sem rodeios, essa ideia é risível.

choice.6 Considerações Intrínsecas sobre a Escolha

sth:choice:justifications:
sec

A questão mais ampla, então, é se a Boa Ordenação, ou a Escolha, ou de fato a comparabilidade de todos os conjuntos quanto ao tamanho—não importa qual—podem ser justificadas.

Eis uma tentativa de justificação *intrínseca*. De volta a ??, introduzimos vários princípios sobre a hierarquia. Um deles merece ser repetido:

Estágios-acumulam. Para qualquer estágio S , e para quaisquer conjuntos que foram formados *antes* do estágio S : forma-se no estágio S um conjunto cujos membros são exatamente esses conjuntos. Nada mais se forma no estágio S .

De fato, muitos autores sugeriram que o Axioma da Escolha pode ser justificado via (algo como) este princípio. Daremos brevemente um resumo dessa abordagem.

Começamos por um resultado simples, que oferece *mais uma* formulação equivalente da Escolha:

sth:choice:justifications:
choiceset

Teorema choice.12 (em ZF). *A Escolha é equivalente ao princípio seguinte. Se os **membros** de A são disjuntos dois a dois e não vazios, então existe algum C tal que $C \cap x$ é um singular para todo o $x \in A$. (Chamamos a tal C um conjunto de escolha para A .)*

A prova deste resultado é direta, e a deixamos como exercício para o leitor.

Problema choice.1. Prove **Teorema choice.12**. Se tiver dificuldades, encontrará uma prova em (Potter, 2004, pp. 242–3).

O ponto essencial é que um conjunto de escolha para A é precisamente o contradomínio de uma função de escolha para A . Assim, para justificar a Escolha, podemos simplesmente tentar justificar a sua formulação equivalente, em termos da existência de conjuntos de escolha. E é exatamente isso que faremos agora.

Sejam os **membros** de A disjuntos dois a dois e não vazios. Por *Estágios-são-chave* (ver ??), A é formado em algum estágio S . Note-se que todos os **membros** de $\bigcup A$ estão disponíveis antes do estágio S . Agora, por *Estágios-acumulam*, para *quaisquer* conjuntos formados antes de S , forma-se um conjunto cujos membros são exatamente esses conjuntos. Dito de outro modo: toda a *possível* coleção de conjuntos disponíveis mais cedo existirá em S . Mas é certamente *possível* seleccionar objetos que possam ser reunidos num conjunto de escolha para A ; isso é apenas um certo subconjunto muito específico de $\bigcup A$. Logo: existe tal conjunto de escolha, como requerido.

Bem, esta é uma tentativa *muito* rápida de oferecer uma justificação da Escolha por razões intrínsecas. Mas, para aprofundar esta ideia, deve ler o desenvolvimento elegante de Potter (2004, §14.8).

choice.7 Paradoxo de Banach–Tarski

Também podemos tentar justificar a Escolha, como Boolos tentou justificar a Substituição, apelando a considerações *extrínsecas* (ver ??). Afinal, adotar a Escolha tem muitas consequências desejáveis: poder comparar qualquer par de cardinais; poder bem ordenar qualquer conjunto; poder tratar os cardinais como um tipo particular de ordinal; etc.

Por vezes, contudo, afirma-se que a Escolha tem consequências *indesejáveis*. Na maior parte dos casos, isso deve-se a um resultado de **Banach and Tarski (1924)**.

Teorema choice.13 (Paradoxo de Banach–Tarski (em ZFC)). *Qualquer bola pode ser decomposta num número finito de peças, que podem ser remontadas (por rotação e transporte) de modo a formar duas cópias dessa bola.*

À primeira vista, isto surpreende. Claramente as duas bolas têm *o dobro* do volume da bola original. Mas os movimentos rígidos—rotação e transporte—não alteram o volume. Parece assim que Banach–Tarski nos permite fazer aparecer matéria nova por magia.

Pior ainda.⁴ Raciocínio semelhante mostra que uma ervilha pode ser cortada num número finito de peças, que depois podem ser remontadas (por rotação e transporte) de modo a formar um objeto com a forma e o tamanho do Big Ben.

Nada disto, porém, vale em **ZF** isoladamente.⁵ Logo temos de decidir: rejeitar a Escolha, ou aprender a viver com o “paradoxo”.

⁴Ver Tomkowicz and Wagon (2016, Theorem 3.12).

⁵Embora Banach–Tarski possa ser provado com princípios estritamente mais fracos do que a Escolha; ver Tomkowicz and Wagon (2016, 303).

Sugerimos que devemos aprender a viver com o “paradoxo”. De fato, não nos parece propriamente um paradoxo. Em particular, não vemos por que haveria de ser mais ou menos paradoxal do que qualquer um dos resultados seguintes:⁶

1. Há tantos pontos no intervalo $(0, 1)$ como em $\mathbb{R}$.
Prova: considere-se $\tan(\pi(r - 1/2))$.
2. Há tantos pontos numa reta como num quadrado.
Ver ?? e ??.
3. Existem curvas que preenchem o espaço.
Ver ?? e ??.

Nenhum destes três resultados requer a Escolha. De fato, já os tratamos simplesmente como matemática surpreendente e bela. Talvez devêssemos adotar a mesma atitude perante o Paradoxo de Banach–Tarski.

Com certeza, é necessária aqui uma observação técnica; mas basta manter a cabeça fria. Os movimentos rígidos preservam volume. Consequentemente, as cinco⁷ peças em que a bola é decomposta não podem todas ser *mensuráveis*. Grosso modo, não faz sentido atribuir volume a estas peças individualmente. Deve pensar nelas como dispersões infinitas de pontos impossíveis de visualizar. Agora, pode ser “estranho” conceber tais conjuntos “infinitamente dispersos”. Mas a sua existência parece seguir da injunção, incorporada em *Estágios-acumulam*, de que se formem *todas* as coleções possíveis de conjuntos disponíveis mais cedo.

Se nada disto convence, eis um último argumento (extrínseco) a favor de abraçar o Paradoxo de Banach–Tarski. Ele implica de imediato a melhor piada matemática de sempre:

Pergunta. O que é um anagrama de “Banach–Tarski”?

Resposta. “Banach–Tarski Banach–Tarski”.

choice.8 Apêndice: Paradoxo de Vitali

sth:choice:vitali:
sec

Para ter uma ideia real de se a construção de Banach–Tarski é aceitável ou não, devíamos examinar a sua *prova*. Infelizmente, isso exigiria muito mais álgebra do que podemos apresentar aqui. Contudo, podemos oferecer algumas observações rápidas que talvez esclareçam a prova de Banach–Tarski,⁸ concentrando-nos no resultado seguinte:

⁶Potter (2004, 276–7), Weston (2003, 16), Tomkowicz and Wagon (2016, 31, 308–9) fazem pontos semelhantes, com outros exemplos.

⁷Enunciamos o Paradoxo em termos de “número finito de peças”. De fato, Robinson (1947) provou que a decomposição pode ser feita com *cinco* peças (mas não menos). Para uma prova, ver Tomkowicz and Wagon (2016, pp. 66–7).

⁸Para um tratamento bem mais completo, ver Weston (2003) ou Tomkowicz and Wagon (2016).

Teorema choice.14 (Paradoxo de Vitali (em ZFC)). *Qualquer círculo pode ser decomposto numa quantidade enumerável de peças, que podem ser remontadas (por rotação e transporte) de modo a formar duas cópias desse círculo.* *sth:choice:vitali:vitaliparadox*

O Paradoxo de Vitali é muito mais fácil de provar do que o Paradoxo de Banach–Tarski. Chamamos-lhe “Paradoxo de Vitali”, pois segue-se da construção, em 1905, de um conjunto não mensurável. Mas os aspectos conjuntistas da prova do Paradoxo de Vitali e do Paradoxo de Banach–Tarski são muito semelhantes. A diferença essencial entre os resultados é que Banach–Tarski considera uma decomposição *finita*, enquanto o Paradoxo de Vitali considera uma decomposição *enumerável infinita*. Como Weston (2003) diz, o Paradoxo de Vitali “certamente não é tão notável como o paradoxo de Banach–Tarski, mas ilustra que paradoxos geométricos podem ocorrer mesmo em situações ‘simples’.”

O Paradoxo de Vitali trata de uma figura bidimensional, um círculo. Logo trabalhamos no plano, $\mathbb{R}^2$. Seja R o conjunto das rotações (no sentido dos ponteiros do relógio) de pontos em torno da origem por valores em radianos *racionais* no intervalo $[0, 2\pi)$. Eis alguns fatos algébricos sobre R (se não compreender o enunciado do resultado, a prova esclarecerá o seu significado):

Lema choice.15. *R forma um grupo abeliano sob a composição de funções.* *sth:choice:vitali:rotationsgroupabelian*

Prova. Escrevendo 0_R para a rotação por 0 radianos, este é um elemento neutro para R , pois $\rho \circ 0_R = 0_R \circ \rho = \rho$ para qualquer $\rho \in R$.

Todo o elemento tem inverso. Onde $\rho \in R$ roda por r radianos, $\rho^{-1} \in R$ roda por $2\pi - r$ radianos, de modo que $\rho \circ \rho^{-1} = 0_R$.

A composição é associativa: $(\tau \circ \sigma) \circ \rho = \tau \circ (\sigma \circ \rho)$ para quaisquer $\rho, \sigma, \tau \in R$

A composição é comutativa: $\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$ para quaisquer $\rho, \sigma \in R$. □

De fato, podemos partir o nosso grupo R ao meio e depois usar qualquer metade para recuperar o grupo inteiro:

Lema choice.16. *Existe uma partição de R em dois conjuntos disjuntos, R_1 e R_2 , ambos dos quais são uma base para R .* *sth:choice:vitali:disjointgroup*

Prova. Seja R_1 o conjunto das rotações por valores racionais em radianos em $[0, \pi)$; seja $R_2 = R \setminus R_1$. Por álgebra elementar, $\{\rho \circ \rho : \rho \in R_1\} = R$. Um resultado semelhante obtém-se para R_2 . □

Usaremos este fato sobre grupos para estabelecer **Teorema choice.14**. Seja $\mathbf{S}$ o círculo unitário, isto é, o conjunto dos pontos exatamente a 1 unidade da origem do plano, isto é, $\{(r, s) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{r^2 + s^2} = 1\}$. Partiremos $\mathbf{S}$ em partes considerando a relação seguinte em $\mathbf{S}$:

$$r \sim s \text{ sse } (\exists \rho \in R)\rho(r) = s.$$

Ou seja, os pontos de $\mathbf{S}$ estão ligados por esta relação sse se pode passar de um para o outro por uma rotação de valor racional em torno da origem. Sem surpresa:

Lema choice.17. $\sim$ é uma relação de equivalência.

Prova. Trivial, usando **Lema choice.15**. $\square$

Invocamos agora a Escolha para obter um conjunto, C , contendo exatamente um membro de cada classe de equivalência de $\mathbf{S}$ sob $\sim$. Ou seja, consideramos uma função de escolha f no conjunto das classes de equivalência,⁹

$$E = \{[r]_{\sim} : r \in \mathbf{S}\},$$

e seja $C = \text{Im}(f)$. Para cada rotação $\rho \in R$, o conjunto $\rho[C]$ consiste nos pontos obtidos ao aplicar a rotação ρ a cada ponto de C . Os dois resultados seguintes mostram que estes conjuntos cobrem o círculo por completo e sem sobreposição:

sth:choice:vitali: **Lema choice.18.** $\mathbf{S} = \bigcup_{\rho \in R} \rho[C]$.
vitalicover

Prova. Fixe-se $s \in \mathbf{S}$; existe algum $r \in C$ tal que $r \in [s]_{\sim}$, isto é, $r \sim s$, isto é, $\rho(r) = s$ para algum $\rho \in R$. $\square$

sth:choice:vitali: **Lema choice.19.** Se $\rho_1 \neq \rho_2$ então $\rho_1[C] \cap \rho_2[C] = \emptyset$.
vitalinooverlap

Prova. Suponhamos $s \in \rho_1[C] \cap \rho_2[C]$. Logo $s = \rho_1(r_1) = \rho_2(r_2)$ para alguns $r_1, r_2 \in C$. Daí $\rho_2^{-1}(\rho_1(r_1)) = r_2$, e $\rho_2^{-1} \circ \rho_1 \in R$, logo $r_1 \sim r_2$. Logo $r_1 = r_2$, pois C selecciona exactamente um membro de cada classe de equivalência sob $\sim$. Logo $s = \rho_1(r_1) = \rho_2(r_1)$, e portanto $\rho_1 = \rho_2$. $\square$

Aplicamos agora os fatos algébricos anteriores ao nosso círculo:

sth:choice:vitali: **Lema choice.20.** Existe uma partição de $\mathbf{S}$ em dois conjuntos disjuntos, D_1 e D_2 , tal que D_1 pode ser particionado numa quantidade enumerável de conjuntos que podem ser rodados de modo a formar uma cópia de $\mathbf{S}$ (e analogamente para D_2).
pseudobanacharski

Prova. Usando R_1 e R_2 de **Lema choice.16**, seja:

$$D_1 = \bigcup_{\rho \in R_1} \rho[C] \qquad D_2 = \bigcup_{\rho \in R_2} \rho[C]$$

Isto é uma partição de $\mathbf{S}$, por **Lema choice.18**, e D_1 e D_2 são disjuntos por **Lema choice.19**. Por construção, D_1 pode ser particionado numa quantidade enumerável de conjuntos, $\rho[C]$ para cada $\rho \in R_1$. E estes podem ser rodados de modo a formar uma cópia de $\mathbf{S}$, pois $\mathbf{S} = \bigcup_{\rho \in R} \rho[C] = \bigcup_{\rho \in R_1} (\rho \circ \rho)[C]$ por **Lema choice.16** e **Lema choice.18**. O mesmo raciocínio vale para D_2 . $\square$

⁹Como R é enumerável, cada membro de E é enumerável. Como $\mathbf{S}$ é não enumerável, segue-se de **Lema choice.18** e ?? que E é não enumerável. Logo isto é um uso de Escolha não enumerável.

Isto implica de imediato o Paradoxo de Vitali. Pois podemos gerar *duas* cópias de $\mathbf{S}$ a partir de $\mathbf{S}$, apenas partindo-o numa quantidade enumerável de peças (os vários $\rho[C]$) e depois movendo-as rigidamente (basta rodar cada peça de D_1 , e primeiro transportar e depois rodar cada peça de D_2).

Recapitulemos a estratégia de prova. Começamos com fatos algébricos sobre o grupo de rotações no plano. Usamos este grupo para partir $\mathbf{S}$ em classes de equivalência. Chegamos então a um “paradoxo”, usando a Escolha para seleccionar elementos de cada classe.

Usamos exatamente a mesma estratégia para provar Banach–Tarski. A principal diferença é que os fatos algébricos usados na prova de Banach–Tarski são bastante mais complicados do que os usados no Paradoxo de Vitali. Mas esses fatos algébricos nada têm a ver com a Escolha. Resumimos-os rapidamente.

Para provar Banach–Tarski, começamos por estabelecer um análogo de **Lema choice.16**: qualquer *grupo livre* pode ser partido em quatro peças que, intuitivamente, podemos “mover” de modo a recuperar duas cópias do grupo inteiro.¹⁰ Mostramos depois que podemos usar duas rotações particulares em torno da origem de $\mathbb{R}^3$ para gerar um grupo livre de rotações, F .¹¹ (Ainda sem Escolha.) Consideramos agora pontos na superfície da esfera como “semelhantes” sse um pode obter-se do outro por uma rotação em F . Usamos então a Escolha para seleccionar exatamente um ponto de cada classe de equivalência de pontos “semelhantes”. Aplicando a nossa divisão de F à superfície da esfera, como em **Lema choice.20**, partimos essa superfície em quatro peças, que podemos “mover” de modo a obter duas cópias da superfície da esfera. E isto estabelece (Hausdorff, 1914):

Teorema choice.21 (Paradoxo de Hausdorff (em ZFC)). *A superfície de qualquer esfera pode ser decomposta num número finito de peças, que podem ser remontadas (por rotação e transporte) de modo a formar duas cópias disjuntas dessa esfera.*

Ainda são precisos alguns truques algébricos para obter o Teorema completo de Banach–Tarski (que não diz só respeito à superfície da esfera, mas também ao seu interior). Francamente, porém, isto é apenas a cereja no topo do bolo algébrico. Por isso Weston escreve:

[...] o resultado sobre grupos livres é o passo *chave* na prova do paradoxo de Banach–Tarski. Deste ponto de vista, o paradoxo de Banach–Tarski não é tanto uma afirmação sobre $\mathbb{R}^3$ quanto uma afirmação sobre a complexidade do grupo [das translações e rotações em $\mathbb{R}^3$]. (Weston, 2003, p. 16)

¹⁰O fato de podermos usar *quatro* peças deve-se a Robinson (1947). Para uma prova recente, ver Tomkowicz and Wagon (2016, Theorem 5.2). Seguimos Weston (2003, p. 3) ao descrever isto como “mover” as peças do grupo.

¹¹Ver Tomkowicz and Wagon (2016, Theorem 2.1).

Ou seja: podermos ou não oferecer uma decomposição *finita* (como em Banach–Tarski) ou uma decomposição *enumerável infinita* (como no Paradoxo de Vitali) resume-se a certos fatos de teoria dos grupos sobre trabalhar em duas ou três dimensões.

Admitidamente, esta última observação estraga ligeiramente a piada no final de [Seção choice.7](#). Por ser bidimensional, “Banach–Tarski” tem de ser dividido numa *infinitude* enumerável de peças, se se quiserem rearranjar essas peças de modo a formar “Banach–Tarski Banach–Tarski”. Para consertar a piada, é preciso escrever em três dimensões. Deixamos isto como exercício para o leitor.

Um último comentário. Na [Seção choice.7](#), mencionamos que as “peças” da esfera que se obtêm não podem ser *mensuráveis*, mas têm de ser dispersões infinitas impossíveis de visualizar. O mesmo vale para o nosso uso da Escolha ao obter [Lema choice.20](#). E tudo isto merece explicação.

De novo, devemos esboçar alguma base (mas isto é *apenas* um esboço; talvez queira consultar uma entrada de manual sobre *medida*). Definir uma medida para um conjunto X é atribuir um valor $\mu(E) \in \mathbb{R}$ a cada E nalguma “ σ -álgebra” sobre X . Os detalhes aqui não são essenciais, exceto que a função μ deve obedecer ao princípio da aditividade enumerável: a medida de uma união enumerável de conjuntos disjuntos é a soma das medidas individuais, isto é, $\mu(\bigcup_{n < \omega} X_n) = \sum_{n < \omega} \mu(X_n)$ sempre que os X_n são disjuntos. Dizer que um conjunto é “não mensurável” é dizer que nenhuma medida pode ser atribuída de modo adequado. Agora, usando o nosso R de antes:

Corolário choice.22 (Vitali). *Seja μ uma medida tal que $\mu(\mathbf{S}) = 1$, e tal que $\mu(X) = \mu(Y)$ se X e Y são congruentes. Então $\rho[C]$ é não mensurável para todo o $\rho \in R$.*

Prova. Por redução ao absurdo, suponhamos o contrário. Seja então $\mu(\sigma[C]) = r$ para algum $\sigma \in R$ e algum $r \in \mathbb{R}$. Para qualquer $\rho \in R$, $\rho[C]$ e $\sigma[C]$ são congruentes, logo $\mu(\rho[C]) = r$ para qualquer $\rho \in R$. Por [Lema choice.18](#) e [Lema choice.19](#), $\mathbf{S} = \bigcup_{\rho \in R} \rho[C]$ é uma união enumerável de conjuntos disjuntos dois a dois. Logo a aditividade enumerável dita que $\mu(\mathbf{S}) = 1$ é a soma das medidas de cada $\rho[C]$, isto é,

$$1 = \mu(\mathbf{S}) = \sum_{\rho \in R} \mu(\rho[C]) = \sum_{\rho \in R} r$$

Mas se $r = 0$ então $\sum_{\rho \in R} r = 0$, e se $r > 0$ então $\sum_{\rho \in R} r = \infty$. □

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

- Banach, Stefan and Alfred Tarski. 1924. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae* 6: 244–77.
- Cantor, Georg. 1878. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84: 242–58.
- Cantor, Georg. 1883. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. Leipzig: Teubner.
- Cohen, Paul J. 1966. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Reading, MA: Benjamin.
- Dedekind, Richard. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg.
- Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Craig G. Fraser, and Akihiro Kanamori. 2010. *Ernst Zermelo. Collected Works*, vol. 1. Berlin: Springer-Verlag.
- Feferman, Solomon and Azriel Levy. 1963. Independence results in set theory by Cohen's method II. *Notices of the American Mathematical Society* 10: 593.
- Hartogs, Friedrich. 1915. Über das Problem der Wohlordnung. *Mathematische Annalen* 76: 438–43.
- Hausdorff, Felix. 1914. Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen. *Mathematische Annalen* 75: 428–34.
- Potter, Michael. 2004. *Set Theory and its Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.
- Robinson, Raphael. 1947. On the decomposition of spheres. *Fundamenta Mathematicae* 34(1): 246–60.
- Russell, Bertrand. 1919. *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: Allen & Unwin.

- Tomkowicz, Grzegorz and Stan Wagon. 2016. *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Vitali, Giuseppe. 1905. *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*. Bologna: Gamberini e Parmeggiani.
- Weston, Tom. 2003. The Banach-Tarski paradox URL <http://people.math.umass.edu/~weston/oldpapers/banach.pdf>.
- Zermelo, Ernst. 1904. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Mathematische Annalen* 59: 514–516. English translation in (Ebbinghaus et al., 2010, pp. 115–119).