

choice.1 Paradoxo de Banach–Tarski

sth:choice:banach:
sec

Também podemos tentar justificar a Escolha, como Boolos tentou justificar a Substituição, apelando a considerações *extrínsecas* (ver ??). Afinal, adotar a Escolha tem muitas consequências desejáveis: poder comparar qualquer par de cardinais; poder bem ordenar qualquer conjunto; poder tratar os cardinais como um tipo particular de ordinal; etc.

Por vezes, contudo, afirma-se que a Escolha tem consequências *indesejáveis*. Na maior parte dos casos, isso deve-se a um resultado de [Banach and Tarski \(1924\)](#).

Teorema choice.1 (Paradoxo de Banach–Tarski (em ZFC)). *Qualquer bola pode ser decomposta num número finito de peças, que podem ser remontadas (por rotação e transporte) de modo a formar duas cópias dessa bola.*

À primeira vista, isto surpreende. Claramente as duas bolas têm *o dobro* do volume da bola original. Mas os movimentos rígidos—rotação e transporte—não alteram o volume. Parece assim que Banach–Tarski nos permite fazer aparecer matéria nova por magia.

Pior ainda.¹ Raciocínio semelhante mostra que uma ervilha pode ser cortada num número finito de peças, que depois podem ser remontadas (por rotação e transporte) de modo a formar um objeto com a forma e o tamanho do Big Ben.

Nada disto, porém, vale em **ZF** isoladamente.² Logo temos de decidir: rejeitar a Escolha, ou aprender a viver com o “paradoxo”.

Sugerimos que devemos aprender a viver com o “paradoxo”. De fato, não nos parece propriamente um paradoxo. Em particular, não vemos por que haveria de ser mais ou menos paradoxal do que qualquer um dos resultados seguintes:³

1. Há tantos pontos no intervalo $(0, 1)$ como em $\mathbb{R}$.
Prova: considere-se $\tan(\pi(r - 1/2))$.
2. Há tantos pontos numa reta como num quadrado.
Ver ?? e ??.
3. Existem curvas que preenchem o espaço.
Ver ?? e ??.

Nenhum destes três resultados requer a Escolha. De fato, já os tratamos simplesmente como matemática surpreendente e bela. Talvez devêssemos adotar a mesma atitude perante o Paradoxo de Banach–Tarski.

¹Ver [Tomkiewicz and Wagon \(2016, Theorem 3.12\)](#).

²Embora Banach–Tarski possa ser provado com princípios estritamente mais fracos do que a Escolha; ver [Tomkiewicz and Wagon \(2016, 303\)](#).

³[Potter \(2004, 276–7\)](#), [Weston \(2003, 16\)](#), [Tomkiewicz and Wagon \(2016, 31, 308–9\)](#) fazem pontos semelhantes, com outros exemplos.

Com certeza, é necessária aqui uma observação técnica; mas basta manter a cabeça fria. Os movimentos rígidos preservam volume. Consequentemente, as cinco⁴ peças em que a bola é decomposta não podem todas ser *mensuráveis*. Grosso modo, não faz sentido atribuir volume a estas peças individualmente. Deve pensar nelas como dispersões infinitas de pontos impossíveis de visualizar. Agora, pode ser “estranho” conceber tais conjuntos “infinitamente dispersos”. Mas a sua existência parece seguir da injunção, incorporada em *Estágios-acumulam*, de que se formem *todas* as coleções possíveis de conjuntos disponíveis mais cedo.

Se nada disto convence, eis um último argumento (extrínseco) a favor de abraçar o Paradoxo de Banach–Tarski. Ele implica de imediato a melhor piada matemática de sempre:

Pergunta. O que é um anagrama de “Banach–Tarski”?

Resposta. “Banach–Tarski Banach–Tarski”.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

- Banach, Stefan and Alfred Tarski. 1924. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae* 6: 244–77.
- Potter, Michael. 2004. *Set Theory and its Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.
- Robinson, Raphael. 1947. On the decomposition of spheres. *Fundamenta Mathematicae* 34(1): 246–60.
- Tomkowicz, Grzegorz and Stan Wagon. 2016. *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Weston, Tom. 2003. The Banach-Tarski paradox URL <http://people.math.umass.edu/~weston/oldpapers/banach.pdf>.

⁴Enunciamos o Paradoxo em termos de “número finito de peças”. De fato, Robinson (1947) provou que a decomposição pode ser feita com *cinco* peças (mas não menos). Para uma prova, ver Tomkowicz and Wagon (2016, pp. 66–7).