

cardinals.1 Finito, Enumerável, Não Enumerável

sth:cardinals:classing:
sec

Agora que fomos introduzidos aos cardinais, vale a pena dedicar um pouco de tempo a variedades de cardinais; nomeadamente, cardinais finitos, **enumerável** e **não enumerável**.

Os nossos dois primeiros resultados implicam que os cardinais finitos serão exatamente os ordinais finitos, que definimos como os nossos *números naturais* em ??:

sth:cardinals:classing:
finitecardisoequal

Proposição cardinals.1. *Sejam $n, m \in \omega$. Então $n = m$ sse $n \approx m$.*

Prova. O sentido da esquerda para a direita é trivial. Para provar da direita para a esquerda, suponha-se $n \approx m$ embora $n \neq m$. Por tricotomia, ou $n \in m$ ou $m \in n$; suponha-se, sem perda de generalidade, $n \in m$. Então $n \subsetneq m$ e existe uma **bijeção** $f: m \rightarrow n$, logo m é infinito de Dedekind, o que contradiz ??.

□

sth:cardinals:classing:
naturalsarecardinals

Corolário cardinals.2. *Se $n \in \omega$, então n é um cardinal.*

Prova. Imediato.

□

Segue-se também que várias noções razoáveis do que possa significar descrever um cardinal como “finito” ou “infinito” coincidem:

sth:cardinals:classing:
generalinfinitycharacter

Teorema cardinals.3. *Para qualquer conjunto A , as seguintes afirmações são equivalentes:*

sth:cardinals:classing:
card:notinomega

1. $|A| \notin \omega$, isto é, A não é um número natural;

sth:cardinals:classing:
card:omegaplus

2. $\omega \leq |A|$;

sth:cardinals:classing:
card:infinite

3. A é infinito de Dedekind.

Prova. Por ??, ??, e **Corolário cardinals.2**.

□

Isto autoriza a seguinte *definição* de algumas noções que usamos de forma informal na ??:

sth:cardinals:classing:
definite

Definição cardinals.4. Diz-se que A é *finito* sse $|A|$ é um número natural, isto é, $|A| \in \omega$. Caso contrário, diz-se que A é *infinito*.

Note-se que esta definição é apresentada no contexto de **ZFC**. Afinal, precisamos do Bom ordenamento para garantir que todo o conjunto tem uma cardinalidade. E, de fato, sem o Bom ordenamento, pode existir um conjunto que nem é finito nem infinito de Dedekind. Voltaremos a este tipo de questão no ??. Por ora, continuamos a assumir o Bom ordenamento.

Passemos agora dos cardinais finitos aos cardinais infinitos. Eis dois pontos elementares:

sth:cardinals:classing:
omegaisacardinal

Corolário cardinals.5. ω é o menor cardinal infinito.

Prova. ω é um cardinal, pois ω é infinito de Dedekind e se $\omega \approx n$ para algum $n \in \omega$ então n seria infinito de Dedekind, contrariando ???. Ora, ω é o menor cardinal infinito por definição. $\square$

Corolário cardinals.6. *Todo o cardinal infinito é um ordinal limite.*

Prova. Seja α um ordinal sucessor infinito, logo $\alpha = \beta + 1$ para algum β . Por **Proposição cardinals.1**, β também é infinito, logo $\beta \approx \beta + 1$ por ???. Ora, $|\beta| = |\beta + 1| = |\alpha|$ por ???, logo $\alpha \neq |\alpha|$. $\square$

Já na ???, assinalamos que podemos distinguir conjuntos infinitos **enumerável** de conjuntos infinitos **não enumerável**. Essa definição conduz naturalmente ao seguinte:

Proposição cardinals.7. *A é enumerável sse $|A| \leq \omega$, e A é não enumerável sse $\omega < |A|$.*

Prova. Por tricotomia, as duas afirmações são equivalentes, bastando provar que A é enumerável sse $|A| \leq \omega$. Para da direita para a esquerda: se $|A| \leq \omega$, então $A \preceq \omega$ por ??? e **Corolário cardinals.5**. Para da esquerda para a direita: suponha-se A enumerável; então, por ???, há três casos possíveis:

1. se $A = \emptyset$, então $|A| = 0 \in \omega$, por **Corolário cardinals.2** e ???.
2. se $n \approx A$, então $|A| = n \in \omega$, por **Corolário cardinals.2** e ???.
3. se $\omega \approx A$, então $|A| = \omega$, por **Corolário cardinals.5**.

Em todos os casos, $|A| \leq \omega$. $\square$

De fato, ω tem um lugar especial. Embora existam muitos ordinais contáveis:

Corolário cardinals.8. *ω é o único cardinal infinito enumerável.*

Prova. Seja $\mathfrak{a}$ um cardinal infinito enumerável. Como $\mathfrak{a}$ é infinito, $\omega \leq \mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a}$ é um cardinal infinito enumerável, $\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}| \leq \omega$. Logo $\mathfrak{a} = \omega$ por tricotomia. $\square$

Claro que existem infinitos cardinais. Poderíamos perguntar: *Quantos cardinais há?* Os resultados seguintes mostram que convém reconsiderar essa pergunta.

Proposição cardinals.9. *Se todo o membro de X é um cardinal, então $\bigcup X$ é um cardinal.*

*sth:cardinals:classing:
unioncardinalscardinal*

Prova. É fácil verificar que $\bigcup X$ é um ordinal. Seja $\alpha \in \bigcup X$ um ordinal; então $\alpha \in \mathfrak{b} \in X$ para algum cardinal $\mathfrak{b}$. Como $\mathfrak{b}$ é um cardinal, $\alpha \prec \mathfrak{b}$. Como $\mathfrak{b} \subseteq \bigcup X$, tem-se $\mathfrak{b} \preceq \bigcup X$, e portanto $\alpha \not\approx \bigcup X$. Generalizando, $\bigcup X$ é um cardinal. $\square$

Teorema cardinals.10. *Não existe um cardinal máximo.*

*sth:cardinals:classing:
lem:NoLargestCardinal*

Prova. Para qualquer cardinal $\mathfrak{a}$, o teorema de Cantor (??) e ?? implicam que $\mathfrak{a} < |\wp(\mathfrak{a})|$. $\square$

Teorema cardinals.11. *O conjunto de todos os cardinais não existe.*

Prova. Por redução ao absurdo, suponha-se $C = \{\mathfrak{a} : \mathfrak{a} \text{ é um cardinal}\}$. Ora, $\bigcup C$ é um cardinal por **Proposição cardinals.9**, logo por **Teorema cardinals.10** existe um cardinal $\mathfrak{b} > \bigcup C$. Por definição $\mathfrak{b} \in C$, logo $\mathfrak{b} \subseteq \bigcup C$, donde $\mathfrak{b} \leq \bigcup C$, uma contradição. $\square$

Compare isto com o paradoxo de Russell e com Burali-Forti.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas