

cardinals.1 Cardinais como Ordinais

sth:cardinals:cardsasords:
sec

De fato, a nossa teoria dos cardinais fará uso (descarado) da nossa teoria dos ordinais. Ou seja: definiremos os cardinais como certos ordinais específicos. Em particular, proporemos o seguinte:

sth:cardinals:cardsasords:
defcardinalasordinal

Definição cardinals.1. Se A pode ser bem ordenado, então $|A|$ é o menor ordinal γ tal que $A \approx \gamma$. Para qualquer ordinal γ , diz-se que γ é um *cardinal* sse $\gamma = |\gamma|$.

Acabamos de usar a locução “ A pode ser bem ordenado”. Como quase sempre em matemática, a locução modal aqui é apenas um atalho para uma asserção existencial: dizer “ A pode ser bem ordenado” é dizer “existe uma relação que bem ordena A ”.

Há contudo um problema com **Definição cardinals.1**. Gostaríamos que *todo* o conjunto tivesse um tamanho, isto é, que $|A|$ existisse para todo A . A definição que acabamos de dar, porém, começa por uma condicional: “Se A pode ser bem ordenado...”. Se existir algum conjunto A que não possa ser bem ordenado, a nossa definição simplesmente deixa de definir um objeto $|A|$.

Logo, para usar **Definição cardinals.1**, precisamos de uma garantia de que todo o conjunto pode ser bem ordenado. Infelizmente, essa garantia não está disponível em **ZF**. Assim, se queremos usar **Definição cardinals.1**, não há alternativa senão acrescentar um novo axioma, tal como:

Bom ordenamento (Bom ordenamento). Todo o conjunto pode ser bem ordenado.

Discutiremos se o axioma do bom ordenamento é aceitável em **??**. Daqui em diante, porém, simplesmente o admitiremos. E, com ele, é bastante direto provar que os cardinais (tal como definidos na **Definição cardinals.1**) existem e comportam-se bem:

sth:cardinals:cardsasords:
lem:CardinalsExist

Lema cardinals.2. Para todo o conjunto A :

sth:cardinals:cardsasords:
cardaexists

1. $|A|$ existe e é único;

sth:cardinals:cardsasords:
cardaapprox

2. $|A| \approx A$;

sth:cardinals:cardsasords:
cardaidem

3. $|A|$ é um cardinal, isto é, $|A| = ||A||$;

Prova. Fixe A . Pelo Bom ordenamento, existe um bom ordenamento $\langle A, R \rangle$. Por **??**, $\langle A, R \rangle$ é isomorfo a um único ordinal, β . Logo $A \approx \beta$. Por indução transfinita, existe um único ordinal mínimo, γ , tal que $A \approx \gamma$. Logo $|A| = \gamma$, o que estabelece (1) e (2). Para (3), note-se que se $\delta \in \gamma$ então $\delta \prec A$, pela escolha de γ , logo também $\delta \prec \gamma$ pois a equipotência é uma relação de equivalência (**??**). Logo $\gamma = |\gamma|$. $\square$

O resultado seguinte garante o Princípio de Cantor, e mais ainda. (Note-se que os cardinais herdam a ordem dos ordinais, isto é, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ sse $\mathfrak{a} \in \mathfrak{b}$. Ao formular isto, usaremos letras Fraktur para objetos que sabemos serem cardinais. Isto é bastante usual. Uma alternativa comum é usar letras gregas, já que os cardinais são ordinais, escolhendo-as do meio do alfabeto, por exemplo κ, λ .):

Lema cardinals.3. *Para quaisquer conjuntos A e B :*

*sth:cardinals:cardsasords:
lem:CardinalsBehaveRight*

$$A \approx B \text{ sse } |A| = |B|$$

$$A \preceq B \text{ sse } |A| \leq |B|$$

$$A \prec B \text{ sse } |A| < |B|$$

Prova. Provaremos o sentido da esquerda para a direita da segunda afirmação (os outros casos são semelhantes e ficam como exercício). Considere-se o diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ |A| & \dashrightarrow & |B| \end{array}$$

As setas duplas indicam **bijeções**, cuja existência é garantida por **Lema cardinals.2**. Ao supor $A \preceq B$, existe **uma injeção** $A \rightarrow B$. Seguindo as setas de $|A|$ para A , para B e para $|B|$, obtém-se **uma injeção** $|A| \rightarrow |B|$ (a seta tracejada). $\square$

Pode ainda usar-se **Lema cardinals.3** para voltar a provar Cantor–Bernstein. Trata-se da afirmação de que se $A \preceq B$ e $B \preceq A$ então $A \approx B$. A enunciamos como ??, mas a provamos primeiro—com algum esforço—em ??. Considere-se:

Nova prova de Schröder–Bernstein. Se $A \preceq B$ e $B \preceq A$, então $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$ por **Lema cardinals.3**. Logo $|A| = |B|$ e $A \approx B$ por tricotomia e **Lema cardinals.3**. $\square$

Embora seja uma prova muito simples, apoia-se implicitamente na Substituição (para assegurar ??) e no Bom ordenamento (para garantir **Lema cardinals.3**). Em contraste, a prova na ?? era muito mais autônoma (de fato, pode efetuar-se em $\mathbf{Z}^-$).

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas