

Capítulo udf

Cardinais

cardinals.1 Princípio de Cantor

sth:cardinals:cp:
sec Volte o pensamento a ???. Estávamos a discutir conjuntos bem ordenados e sugerimos que seria desejável ter objetos que funcionem como representantes dos bons ordenamentos. Com isto em mente, introduzimos os ordinais e depois mostramos em ??? que estes se comportam como desejamos, isto é:

$$\text{ord}(A, <) = \text{ord}(B, <) \text{ sse } \langle A, < \rangle \cong \langle B, < \rangle.$$

Volte ainda mais atrás, a ????. Ali, trabalhando ingenuamente, introduzimos a noção de “tamanho” de um conjunto. Especificamente, dissemos que dois conjuntos são equipotentes, $A \approx B$, precisamente quando existe uma **bijeção** $f: A \rightarrow B$. Esta noção é intrinsecamente mais simples do que a de um bom ordenamento: interessam-nos apenas as **bijeções**, e não (como com os isomorfismos de ordem) se as **bijeções** “preservam alguma estrutura”.

Tudo isto sugere um pensamento óbvio. Tal como introduzimos certos objetos, *ordinais*, para calibrar bons ordenamentos, podemos introduzir certos objetos, *cardinais*, para calibrar tamanho. Esse é o objetivo deste capítulo.

Antes de dizer o que serão estes cardinais, convém enunciar um princípio que devem satisfazer. Escrevendo $|X|$ para a cardinalidade do conjunto X , desejariamos que obedecessem a:

$$|A| = |B| \text{ sse } A \approx B.$$

Chamaremos a isto o Princípio *de Cantor*, já que Cantor foi provavelmente o primeiro a tê-lo claramente presente. (Diremos mais sobre a sua relação com o Princípio de *Hume* na **Seção cardinals.5.**) O nosso objetivo é definir $|X|$, para cada X , de modo a que satisfaça o Princípio de Cantor.

cardinals.2 Cardinais como Ordinais

sth:cardinals:cardsasords:
sec

De fato, a nossa teoria dos cardinais fará uso (descarado) da nossa teoria dos ordinais. Ou seja: definiremos os cardinais como certos ordinais específicos. Em particular, proporemos o seguinte:

Definição cardinals.1. Se A pode ser bem ordenado, então $|A|$ é o menor ordinal γ tal que $A \approx \gamma$. Para qualquer ordinal γ , diz-se que γ é um *cardinal* sse $\gamma = |\gamma|$.

sth:cardinals:cardsasords:
defcardinalasordinal

Acabamos de usar a locução “ A pode ser bem ordenado”. Como quase sempre em matemática, a locução modal aqui é apenas um atalho para uma asserção existencial: dizer “ A pode ser bem ordenado” é dizer “existe uma relação que bem ordena A ”.

Há contudo um problema com **Definição cardinals.1**. Gostaríamos que *toda* o conjunto tivesse um tamanho, isto é, que $|A|$ existisse para todo A . A definição que acabamos de dar, porém, começa por uma condicional: “Se A pode ser bem ordenado...”. Se existir algum conjunto A que não possa ser bem ordenado, a nossa definição simplesmente deixa de definir um objeto $|A|$.

Logo, para usar **Definição cardinals.1**, precisamos de uma garantia de que todo o conjunto pode ser bem ordenado. Infelizmente, essa garantia não está disponível em **ZF**. Assim, se queremos usar **Definição cardinals.1**, não há alternativa senão acrescentar um novo axioma, tal como:

Bom ordenamento (Bom ordenamento). Todo o conjunto pode ser bem ordenado.

Discutiremos se o axioma do bom ordenamento é aceitável em **??**. Daqui em diante, porém, simplesmente o admitiremos. E, com ele, é bastante direto provar que os cardinais (tal como definidos na **Definição cardinals.1**) existem e comportam-se bem:

Lema cardinals.2. Para todo o conjunto A :

1. $|A|$ existe e é único;
2. $|A| \approx A$;
3. $|A|$ é um *cardinal*, isto é, $|A| = ||A||$;

sth:cardinals:cardsasords:
lem:CardinalsExist
sth:cardinals:cardsasords:
cardaexists
sth:cardinals:cardsasords:
cardaapprox
sth:cardinals:cardsasords:
cardaidem

Prova. Fixe A . Pelo Bom ordenamento, existe um bom ordenamento $\langle A, R \rangle$. Por **??**, $\langle A, R \rangle$ é isomorfo a um único ordinal, β . Logo $A \approx \beta$. Por indução transfinita, existe um único ordinal mínimo, γ , tal que $A \approx \gamma$. Logo $|A| = \gamma$, o que estabelece (1) e (2). Para (3), note-se que se $\delta \in \gamma$ então $\delta \prec A$, pela escolha de γ , logo também $\delta \prec \gamma$ pois a equipotência é uma relação de equivalência (**??**). Logo $\gamma = |\gamma|$. $\square$

O resultado seguinte garante o Princípio de Cantor, e mais ainda. (Note-se que os cardinais herdam a ordem dos ordinais, isto é, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ sse $\mathfrak{a} \in \mathfrak{b}$. Ao formular isto, usaremos letras Fraktur para objetos que sabemos serem cardinais. Isto é bastante usual. Uma alternativa comum é usar letras gregas,

já que os cardinais são ordinais, escolhendo-as do meio do alfabeto, por exemplo κ, λ):

*sth:cardinals:cardsasords:
lem:CardinalsBehaveRight*

Lema cardinals.3. Para quaisquer conjuntos A e B :

$$A \approx B \text{ sse } |A| = |B|$$

$$A \preceq B \text{ sse } |A| \leq |B|$$

$$A \prec B \text{ sse } |A| < |B|$$

Prova. Provaremos o sentido da esquerda para a direita da segunda afirmação (os outros casos são semelhantes e ficam como exercício). Considere-se o diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ |A| & \dashrightarrow & |B| \end{array}$$

As setas duplas indicam **bijeções**, cuja existência é garantida por **Lema cardinals.2**. Ao supor $A \preceq B$, existe **uma injeção** $A \rightarrow B$. Seguindo as setas de $|A|$ para A , para B e para $|B|$, obtém-se **uma injeção** $|A| \rightarrow |B|$ (a seta tracejada). $\square$

Pode ainda usar-se **Lema cardinals.3** para voltar a provar Cantor–Bernstein. Trata-se da afirmação de que se $A \preceq B$ e $B \preceq A$ então $A \approx B$. A enunciamos como ??, mas a provamos primeiro—com algum esforço—em ??. Considere-se:

Nova prova de Schröder–Bernstein. Se $A \preceq B$ e $B \preceq A$, então $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$ por **Lema cardinals.3**. Logo $|A| = |B|$ e $A \approx B$ por tricotomia e **Lema cardinals.3**. $\square$

Embora seja uma prova muito simples, apoia-se implicitamente na Substituição (para assegurar ??) e no Bom ordenamento (para garantir **Lema cardinals.3**). Em contraste, a prova na ?? era muito mais autônoma (de fato, pode efetuar-se em $\mathbf{Z}^-$).

cardinals.3 ZFC: um marco

*sth:cardinals:zfc:
sec*

Com a adição do axioma do bom ordenamento, atingimos o último marco teórico. Dispomos agora de todos os axiomas necessários para **ZFC**. Em detalhe:

Definição cardinals.4. A teoria **ZFC** tem estes axiomas: Extensionalidade, União, Pares, Conjuntos potência, Infinitude, Fundação, Bom ordenamento e todas as instâncias dos esquemas de Separação e Substituição. Dito de outro modo, **ZFC** acrescenta o Bom ordenamento a **ZF**.

ZFC significa teoria de conjuntos de *Zermelo–Fraenkel* com *Escolha*. Isto pode parecer ligeiramente estranho, pois o axioma que adicionamos se chama “Bom ordenamento”, não “Escolha”. Mas, quando mais tarde formularmos a *Escolha*, verificar-se-á que o Bom ordenamento lhe é equivalente (módulo **ZF**) (ver ??). Logo, qual tomar como axioma “básico” é indiferente. E o nome “**ZFC**” é inteiramente standard na literatura.

cardinals.4 Finito, Enumerável, Não Enumerável

Agora que fomos introduzidos aos cardinais, vale a pena dedicar um pouco de tempo a variedades de cardinais; nomeadamente, cardinais finitos, **enumerável** e **não enumerável**.

sth:cardinals:classing:
sec

Os nossos dois primeiros resultados implicam que os cardinais finitos serão exatamente os ordinais finitos, que definimos como os nossos *números naturais* em ??:

Proposição cardinals.5. *Sejam $n, m \in \omega$. Então $n = m$ sse $n \approx m$.*

sth:cardinals:classing:
finitecardisoequal

Prova. O sentido da esquerda para a direita é trivial. Para provar da direita para a esquerda, suponha-se $n \approx m$ embora $n \neq m$. Por tricotomia, ou $n \in m$ ou $m \in n$; suponha-se, sem perda de generalidade, $n \in m$. Então $n \subsetneq m$ e existe uma bijeção $f: m \rightarrow n$, logo m é infinito de Dedekind, o que contradiz ??.

□

Corolário cardinals.6. *Se $n \in \omega$, então n é um cardinal.*

sth:cardinals:classing:
naturalsarecardinals

Prova. Imediato.

□

Segue-se também que várias noções razoáveis do que possa significar descrever um cardinal como “finito” ou “infinito” coincidem:

Teorema cardinals.7. *Para qualquer conjunto A , as seguintes afirmações são equivalentes:*

sth:cardinals:classing:
generalinfinitycharacter

1. $|A| \notin \omega$, isto é, A não é um número natural;
2. $\omega \leq |A|$;
3. A é infinito de Dedekind.

sth:cardinals:classing:
card:notinomega

sth:cardinals:classing:
card:omegaplus

sth:cardinals:classing:
card:infinite

Prova. Por ??, **Lema cardinals.3**, e **Corolário cardinals.6**.

□

Isto autoriza a seguinte *definição* de algumas noções que usamos de forma informal na ??:

Definição cardinals.8. Diz-se que A é *finito* sse $|A|$ é um número natural, isto é, $|A| \in \omega$. Caso contrário, diz-se que A é *infinito*.

sth:cardinals:classing:
defnfinite

Note-se que esta definição é apresentada no contexto de **ZFC**. Afinal, precisamos do Bom ordenamento para garantir que todo o conjunto tem uma cardinalidade. E, de fato, sem o Bom ordenamento, pode existir um conjunto que nem é finito nem infinito de Dedekind. Voltaremos a este tipo de questão no ???. Por ora, continuamos a assumir o Bom ordenamento.

Passemos agora dos cardinais finitos aos cardinais infinitos. Eis dois pontos elementares:

*sth:cardinals:classing:
omegaisacardinal*

Corolário cardinals.9. ω é o menor cardinal infinito.

Prova. ω é um cardinal, pois ω é infinito de Dedekind e se $\omega \approx n$ para algum $n \in \omega$ então n seria infinito de Dedekind, contrariando ??. Ora, ω é o menor cardinal infinito por definição. $\square$

Corolário cardinals.10. *Todo o cardinal infinito é um ordinal limite.*

Prova. Seja α um ordinal sucessor infinito, logo $\alpha = \beta + 1$ para algum β . Por **Proposição cardinals.5**, β também é infinito, logo $\beta \approx \beta + 1$ por ??. Ora, $|\beta| = |\beta + 1| = |\alpha|$ por **Lema cardinals.3**, logo $\alpha \neq |\alpha|$. $\square$

Já na ??, assinalamos que podemos distinguir conjuntos infinitos **enumerável** de conjuntos infinitos **não enumerável**. Essa definição conduz naturalmente ao seguinte:

Proposição cardinals.11. A é **enumerável** sse $|A| \leq \omega$, e A é **não enumerável** sse $\omega < |A|$.

Prova. Por tricotomia, as duas afirmações são equivalentes, bastando provar que A é **enumerável** sse $|A| \leq \omega$. Para *da direita para a esquerda*: se $|A| \leq \omega$, então $A \preceq \omega$ por **Lema cardinals.3** e **Corolário cardinals.9**. Para *da esquerda para a direita*: suponha-se A **enumerável**; então, por ??, há três casos possíveis:

1. se $A = \emptyset$, então $|A| = 0 \in \omega$, por **Corolário cardinals.6** e **Lema cardinals.3**.
2. se $n \approx A$, então $|A| = n \in \omega$, por **Corolário cardinals.6** e **Lema cardinals.3**.
3. se $\omega \approx A$, então $|A| = \omega$, por **Corolário cardinals.9**.

Em todos os casos, $|A| \leq \omega$. $\square$

De fato, ω tem um lugar especial. Embora existam muitos ordinais contáveis:

Corolário cardinals.12. ω é o único cardinal infinito **enumerável**.

Prova. Seja $\mathfrak{a}$ um cardinal infinito enumerável. Como $\mathfrak{a}$ é infinito, $\omega \leq \mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a}$ é um cardinal infinito enumerável, $\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}| \leq \omega$. Logo $\mathfrak{a} = \omega$ por tricotomia. $\square$

Claro que existem infinitos cardinais. Poderíamos perguntar: *Quantos cardinais há?* Os resultados seguintes mostram que convém reconsiderar essa pergunta.

Proposição cardinals.13. *Se todo o membro de X é um cardinal, então $\bigcup X$ é um cardinal.*

*sth:cardinals:classing:
unioncardinalscardinal*

Prova. É fácil verificar que $\bigcup X$ é um ordinal. Seja $\alpha \in \bigcup X$ um ordinal; então $\alpha \in \mathfrak{b} \in X$ para algum cardinal $\mathfrak{b}$. Como $\mathfrak{b}$ é um cardinal, $\alpha \prec \mathfrak{b}$. Como $\mathfrak{b} \subseteq \bigcup X$, tem-se $\mathfrak{b} \preceq \bigcup X$, e portanto $\alpha \not\approx \bigcup X$. Generalizando, $\bigcup X$ é um cardinal. $\square$

Teorema cardinals.14. *Não existe um cardinal máximo.*

*sth:cardinals:classing:
lem:NoLargestCardinal*

Prova. Para qualquer cardinal $\mathfrak{a}$, o teorema de Cantor (??) e **Lema cardinals.2** implicam que $\mathfrak{a} < |\wp(\mathfrak{a})|$. $\square$

Teorema cardinals.15. *O conjunto de todos os cardinais não existe.*

Prova. Por redução ao absurdo, suponha-se $C = \{\mathfrak{a} : \mathfrak{a} \text{ é um cardinal}\}$. Ora, $\bigcup C$ é um cardinal por **Proposição cardinals.13**, logo por **Teorema cardinals.14** existe um cardinal $\mathfrak{b} > \bigcup C$. Por definição $\mathfrak{b} \in C$, logo $\mathfrak{b} \subseteq \bigcup C$, donde $\mathfrak{b} \leq \bigcup C$, uma contradição. $\square$

Compare isto com o paradoxo de Russell e com Burali-Forti.

cardinals.5 Apêndice: Princípio de Hume

Na **Seção cardinals.1**, descrevemos o Princípio de Cantor. Era:

*sth:cardinals:hp:
sec*

$$|A| = |B| \text{ sse } A \approx B.$$

Isto é muito semelhante ao que hoje se chama *Princípio de Hume*, que diz:

$$\#x F(x) = \#x G(x) \text{ sse } F \sim G$$

onde ‘ $F \sim G$ ’ abrevia que há tantos F quantos G , isto é, os F podem pôr-se em bijeção com os G , isto é:

$$\begin{aligned} \exists R(\forall v \forall y(Rvy \rightarrow (Fv \wedge Gy)) \wedge \\ \forall v(Fv \rightarrow \exists! y Rvy) \wedge \\ \forall y(Gy \rightarrow \exists! v Rvy)) \end{aligned}$$

Mas há uma diferença de tipo entre o Princípio de Hume e o Princípio de Cantor. No enunciado do Princípio de Cantor, as variáveis “ A ” e “ B ” são termos de primeira ordem que denotam *conjuntos*. No enunciado do Princípio de Hume, “ F ”, “ G ” e “ R ” *não* são termos de primeira ordem; estão em *posição*

de predicado. (Talvez denotem *propriedades*.) Assim, o Princípio de Hume pode parafrasear-se em português: o número de *F*s é o número de *G*s sse os *F*s estão em bijeção com os *G*s. Chama-se *Princípio de Hume* porque Hume escreveu o seguinte:

Quando dois números se combinam de tal modo que a cada unidade de um corresponde sempre uma unidade do outro, dizemos que são iguais. (Hume, 1740, Pt.III Bk.1 §1)

E o Princípio de Hume foi trazido à proeminência matemático-lógica contemporânea por Frege (1884, §63), que citou esta passagem de Hume antes de (em efeito) esboçar (o que chamamos) Princípio de Hume.

Note a semelhança estrutural entre o Princípio de Hume e a Lei Básica V. A formulamos na ?? do seguinte modo:

$$\epsilon x F(x) = \epsilon x G(x) \text{ sse } \forall x (F(x) \leftrightarrow G(x)).$$

E, neste ponto, alguns comentários e comparações podem ajudar.

Há duas maneiras de entender um princípio como o Princípio de Hume ou a Lei Básica V: *predicativamente* ou *impredicativamente* (recorde ??). Na leitura impredicativa da Lei Básica V, para cada *F*, o objeto $\epsilon x F(x)$ pertence ao domínio de quantificação usado na própria formulação da Lei Básica V. Do mesmo modo, na leitura impredicativa do Princípio de Hume, para cada *F*, o objeto $\#x F(x)$ pertence ao domínio de quantificação usado na formulação do Princípio de Hume. Em contraste, na compreensão *predicativa*, os objetos $\epsilon x F(x)$ e $\#x F(x)$ seriam entidades de um domínio *diferente*.

Agora, se a Lei Básica V se lê impredicativamente, conduz à inconsistência, via Compreensão ingênua (para pormenores, ver ??). Tal como a Compreensão ingênua, pode tornar-se consistente se se lê *predicativamente*. Mas provavelmente não fará tudo o que desejávamos.

O Princípio de Hume, porém, *pode* ser lido de modo consistente impredicativamente. E, assim lido, é bastante poderoso.

Para ilustrar: considere-se o predicado “ $x \neq x$ ”, que obviamente nada satisfaz. O Princípio de Hume fornece agora um objeto $\#x(x \neq x)$. Podemos tratá-lo como o número 0. Agora, na compreensão *impredicativa*—mas *só* na impredicativa—esta entidade 0 pertence ao nosso domínio original de quantificação. Logo podemos aplicar sensatamente o Princípio de Hume com o predicado “ $x = 0$ ” para obter um objeto $\#x(x = 0)$. Podemos tratá-lo como o número 1. Além disso, o Princípio de Hume implica que $0 \neq 1$, pois não pode haver bijeção dos objetos não auto-idênticos para os objetos idênticos a 0 (não há dos primeiros, mas há um dos segundos). Agora, de novo impredicativamente, 1 pertence ao domínio original de quantificação. Logo podemos aplicar o Princípio de Hume com o predicado “ $(x = 0 \vee x = 1)$ ” para obter um objeto $\#x(x = 0 \vee x = 1)$. Podemos tratá-lo como o número 2, e mostrar que $0 \neq 2$ e $1 \neq 2$, e assim por diante.

Em suma, tomado impredicativamente, o Princípio de Hume implica que há *infinitamente muitos objetos*. E isto encorajou os *logicistas neo-fregeanos* a tomar o Princípio de Hume como fundação da aritmética.

O próprio Frege, contudo, não tomou o Princípio de Hume como fundação da aritmética. Em vez disso, Frege provou o Princípio de Hume a partir de uma definição explícita: $\#x F(x)$ é definido como a extensão do conceito $F \sim \Phi$. Em termos modernos, poder-se-ia tentar render isto como $\#x F(x) = \{G : F \sim G\}$; mas isto volta a arrastar-nos para os problemas da Compreensão ingênua.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Frege, Gottlob. 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: Wilhelm Koebner. Translation in Frege (1953).

Frege, Gottlob. 1953. *Foundations of Arithmetic*, ed. J. L. Austin. Oxford: Basil Blackwell & Mott, 2nd ed.

Hume, David. 1740. *A Treatise of Human Nature*. London.