

## card-arithmetic.1 Pontos Fixos de $\aleph$

sth:card-arithmetic:fix:  
sec

No ??, sugerimos que o Esquema de Substituição carece de justificação, pois força a hierarquia a ser bastante alta. Tendo feito alguma aritmética cardinal, podemos dar uma pequena ilustração da altura da hierarquia.

Evidentemente  $0 < \aleph_0$ , e  $1 < \aleph_1$ , e  $2 < \aleph_2 \dots$  e, de fato, a diferença de tamanho só fica *maior* a cada passo. Assim, é tentador conjecturar que  $\kappa < \aleph_\kappa$  para todo o ordinal  $\kappa$ .

Mas esta conjectura é *falsa*, em **ZFC**. De fato, podemos provar que existem *pontos fixos* de  $\aleph$ , isto é, cardinais  $\kappa$  tais que  $\kappa = \aleph_\kappa$ .

sth:card-arithmetic:fix:  
alephfixed

**Proposição card-arithmetic.1.** *Existe um ponto fixo de  $\aleph$ .*

*Prova.* Por recursão, defina-se:

$$\begin{aligned}\kappa_0 &= 0 \\ \kappa_{n+1} &= \aleph_{\kappa_n} \\ \kappa &= \bigcup_{n < \omega} \kappa_n\end{aligned}$$

Ora,  $\kappa$  é um cardinal por ??. Mas então:

$$\kappa = \bigcup_{n < \omega} \kappa_{n+1} = \bigcup_{n < \omega} \aleph_{\kappa_n} = \bigcup_{\alpha < \kappa} \aleph_\alpha = \aleph_\kappa \quad \square$$

Boolos escreveu um artigo sobre precisamente o ponto fixo de  $\aleph$  que acabamos de construir. Depois de notar a existência de  $\kappa$ , no início do artigo, disse:

[ $\kappa$  é] um número *bastante grande*, aos olhos de quem não teve contato prévio com a teoria dos conjuntos, tão grande, me parece, que põe em causa a verdade de qualquer teoria que, entre as suas afirmações, inclua a de que existem pelo menos  $\kappa$  objetos. (Boolos, 2000, p. 257)

E concluiu o artigo perguntando:

[será que] suspeitamos que, seja qual for o começo da história, quando chegamos tão longe as rodas giram no vazio e já não estamos a ouvir uma descrição de coisa alguma que seja o caso? (Boolos, 2000, p. 268)

Se, de fato, ultrapassamos “qualquer coisa que seja o caso”, então devemos apontar o dedo da culpa diretamente ao Esquema de Substituição. Pois é este axioma que permite a nossa prova funcionar. Nesse caso, supõe-se, Boolos teria de rever a afirmação que fizera, décadas antes, de que a Substituição não tem consequências “indesejáveis” (ver ??).

Mas será a existência de  $\kappa$  assim tão má? Pode ajudar, aqui, considerar o *paradoxo de Tristram Shandy* de Russell. Tristram Shandy documenta a sua vida no diário, mas demora um ano a registrar um único dia. A cada ano que passa, Tristram fica cada vez mais atrasado: passado um ano, só registrou um dia, e viveu 364 dias por registrar; passados dois anos, só registrou dois dias, e viveu 728 dias por registrar; passados três anos, só registrou três dias, e viveu 1092 dias por registrar ...<sup>1</sup> Ainda assim, se Tristram é *imortal*, conseguirá registrar todos os dias, pois registrará o  $n$ -ésimo dia no  $n$ -ésimo ano da sua vida. E assim, “no fim dos tempos”, Tristram terá um diário completo.

Porque é que isto difere tanto da ideia de que  $\alpha$  é menor do que  $\aleph_\alpha$ —e, de fato, cada vez mais, desesperadamente menor—até  $\kappa$ , onde nos “apanhamos” e  $\kappa = \aleph_\kappa$ ?

Deixando isto de lado, e supondo que aceitamos **ZFC**, fechemos com um pouco mais de diversão sobre construções de pontos fixos. Os três resultados seguintes estabelecem, intuitivamente, que existe um ponto (não trivial) em que a hierarquia é tão larga como alta:

**Proposição card-arithmetic.2.** *Existe um ponto fixo de  $\beth$ , isto é, um  $\kappa$  tal que  $\kappa = \beth_\kappa$ .*

*sth:card-arithmetic:fix:  
bethfixed*

*Prova.* Como na **Proposição card-arithmetic.1**, usando “ $\beth$ ” no lugar de “ $\aleph$ ”.  $\square$

**Proposição card-arithmetic.3.**  $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$ . Se  $\omega \cdot \omega \leq \alpha$ , então  $|V_\alpha| = \beth_\alpha$ .

*sth:card-arithmetic:fix:  
stagesize*

*Prova.* A primeira afirmação vale por uma indução transfinita simples. A segunda segue-se, pois se  $\omega \cdot \omega \leq \alpha$  então  $\omega + \alpha = \alpha$ . Para o estabelecer, usamos fatos sobre aritmética ordinal de ???. Note-se primeiro que  $\omega \cdot \omega = \omega \cdot (1 + \omega) = (\omega \cdot 1) + (\omega \cdot \omega) = \omega + (\omega \cdot \omega)$ . Ora, se  $\omega \cdot \omega \leq \alpha$ , isto é,  $\alpha = (\omega \cdot \omega) + \beta$  para algum  $\beta$ , então  $\omega + \alpha = \omega + ((\omega \cdot \omega) + \beta) = (\omega + (\omega \cdot \omega)) + \beta = (\omega \cdot \omega) + \beta = \alpha$ .  $\square$

**Corolário card-arithmetic.4.** *Existe um  $\kappa$  tal que  $|V_\kappa| = \kappa$ .*

*Prova.* Seja  $\kappa$  um ponto fixo de  $\beth$ , dado por **Proposição card-arithmetic.2**. Claramente  $\omega \cdot \omega < \kappa$ . Logo  $|V_\kappa| = \beth_\kappa = \kappa$  por **Proposição card-arithmetic.3**.  $\square$

Há tantos estágios abaixo de  $V_\kappa$  quantos **membros** de  $V_\kappa$ . Intuitivamente, então,  $V_\kappa$  é tão largo como alto. Isto é muito à maneira de Tristram Shandy: passamos de um estágio ao seguinte tomando *conjuntos potência*, tornando a hierarquia *muito* maior a cada passo. Mas “no fim”, isto é, no estágio  $\kappa$ , a largura da hierarquia alcança a altura.

Alguém pode perguntar: *Com que frequência a largura da hierarquia coincide com a altura?* A resposta é: *Tantas vezes quantos os ordinais*. Mas isto precisa de uma pequena explicação.

---

<sup>1</sup>Ignorando anos bissextos.

Definimos um termo  $\tau$  do seguinte modo. Para qualquer  $A$ , seja:

$$\begin{aligned}\tau_0(A) &= |A| \\ \tau_{n+1}(A) &= \beth_{\tau_n(A)} \\ \tau(A) &= \bigcup_{n < \omega} \tau_n(A)\end{aligned}$$

Como na [Proposição card-arithmetic.2](#),  $\tau(A)$  é um ponto fixo de  $\beth$  para qualquer  $A$ , e trivialmente  $|A| < \tau(A)$ . Considere-se então esta definição recursiva:

$$\begin{aligned}W_0 &= 0 \\ W_{\alpha+1} &= \tau(W_\alpha) \\ W_\alpha &= \bigcup_{\beta < \alpha} W_\beta, \text{ quando } \alpha \text{ é limite}\end{aligned}$$

A construção está definida para todos os ordinais. Intuitivamente, então,  $W$  é “uma injeção” dos ordinais nos pontos fixos de  $\beth$ . E, exatamente como antes,  $V_{W_\alpha}$  é tão largo como alto, para qualquer  $\alpha$ .

## Créditos das Imagens

## Referências Bibliográficas

Boolos, George. 2000. Must we believe in set theory? In *Between Logic and Intuition: Essays in Honor of Charles Parsons*, eds. Gila Sher and Richard Tieszen, 257–68. Cambridge: Cambridge University Press.