

card-arithmetic.1 Algumas Simplificações com Exponenciação Cardinal

Embora definir $\triangleleft$ fosse um pouco trabalhoso, o resultado é um teorema útil sobre adição e multiplicação cardinais, ???. A exponenciação transfinita, porém, não se simplifica tão diretamente. Para explicar por que, começamos por um resultado que prolonga um padrão familiar do caso finitário (embora a sua prova esteja a um nível elevado de abstração):

Proposição card-arithmetic.1. $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \otimes \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}$ e $(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{c}}$, para quaisquer cardinais $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$.

Prova. Para a primeira afirmação, considere-se uma função $f: (\mathfrak{b} \sqcup \mathfrak{c}) \rightarrow \mathfrak{a}$. Ora, “parta-se” isto, definindo $f_{\mathfrak{b}}(\beta) = f(\beta, 0)$ para cada $\beta \in \mathfrak{b}$, e $f_{\mathfrak{c}}(\gamma) = f(\gamma, 1)$ para cada $\gamma \in \mathfrak{c}$. A aplicação $f \mapsto (f_{\mathfrak{b}} \times f_{\mathfrak{c}})$ é uma bijeção ${}^{\mathfrak{b} \sqcup \mathfrak{c}}\mathfrak{a} \rightarrow ({}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} \times {}^{\mathfrak{c}}\mathfrak{a})$.

Para a segunda afirmação, considere-se uma função $f: \mathfrak{c} \rightarrow ({}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a})$; assim, para cada $\gamma \in \mathfrak{c}$ temos alguma função $f(\gamma): \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{a}$. Ora, defina-se $f^*(\beta, \gamma) = (f(\gamma))(\beta)$ para cada $\langle \beta, \gamma \rangle \in \mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$. A aplicação $f \mapsto f^*$ é uma bijeção ${}^{\mathfrak{c}}({}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}) \rightarrow {}^{\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{c}}\mathfrak{a}$. $\square$

O que gostaríamos *mesmo* era de uma maneira fácil de calcular $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ quando tratamos de cardinais infinitos. Eis um passo útil nessa direção:

Proposição card-arithmetic.2. Se $2 \leq \mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b}$ é infinito, então $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}}$

Prova.

$$\begin{aligned} 2^{\mathfrak{b}} &\leq \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}, \text{ pois } 2 \leq \mathfrak{a} \\ &\leq (2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{b}}, \text{ por } ?? \\ &= 2^{\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}}, \text{ por Proposição card-arithmetic.1} \\ &= 2^{\mathfrak{b}}, \text{ por } ?? \end{aligned} \quad \square$$

Não devemos esperar poder simplificar mais além disto, pois $\mathfrak{b} < 2^{\mathfrak{b}}$ por ???. Contudo, isto não nos diz o que afirmar sobre $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ quando $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$. Naturalmente, se $\mathfrak{b}$ é finito, sabemos o que fazer.

Proposição card-arithmetic.3. Se $\mathfrak{a}$ é infinito e $n \in \omega$, então $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}$

Prova. $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} \otimes \dots \otimes \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, por ???. $\square$

Adicionalmente, nalguns outros casos, podemos controlar o tamanho de $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$:

Proposição card-arithmetic.4. Se $2 \leq \mathfrak{b} < \mathfrak{a} \leq 2^{\mathfrak{b}}$ e $\mathfrak{b}$ é infinito, então $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}}$

Prova. $2^{\mathfrak{b}} \leq \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \leq (2^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}}$, raciocinando como na Proposição card-arithmetic.2. $\square$

Para além deste ponto, as coisas tornam-se bastante mais subtis.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas