

card-arithmetic.1 A Hipótese do Contínuo

sth:card-arithmetic:ch:
sec

O resultado anterior sugere (corretamente) que a exponenciação cardinal seria bastante *fácil*, se os cardinais infinitos estivessem garantidos a “comportar-se de forma simples” com potências de 2, isto é, (por ??) com a operação de tomar conjuntos potência. Mas não podemos supor que os cardinais infinitos *se comportem* de forma simples com os conjuntos potência.

Começando a desdobrar isto, introduzimos uma notação conveniente.

Definição card-arithmetic.1. Onde $\aleph^\oplus$ é o menor cardinal estritamente maior do que $\aleph$, definimos duas sequências infinitas:

$$\begin{aligned} \aleph_0 &= \omega & \beth_0 &= \omega \\ \aleph_{\alpha+1} &= (\aleph_\alpha)^\oplus & \beth_{\alpha+1} &= 2^{\beth_\alpha} \\ \aleph_\alpha &= \bigcup_{\beta < \alpha} \aleph_\beta & \beth_\alpha &= \bigcup_{\beta < \alpha} \beth_\beta \quad \text{quando } \alpha \text{ é um ordinal limite.} \end{aligned}$$

A definição de $\aleph^\oplus$ faz sentido, pois ?? nos diz que, para cada cardinal $\aleph$, existe algum cardinal maior do que $\aleph$, e a Indução Transfinita garante que existe um cardinal *mínimo* maior do que $\aleph$. O resto da definição é fornecido pela recursão transfinita.

Cantor introduziu esta notação “ $\aleph$ ”; trata-se do *alef*, a primeira letra do alfabeto hebraico e a primeira letra da palavra hebraica para “infinito”. Peirce introduziu a notação “ $\beth$ ”; trata-se do *beth*, a segunda letra do alfabeto hebraico.¹ Estas notações fornecem-nos cardinais infinitos.

Proposição card-arithmetic.2. $\aleph_\alpha$ e $\beth_\alpha$ são cardinais, para todo o ordinal α .

Prova. Ambos os resultados valem por uma indução transfinita simples. $\aleph_0 = \beth_0 = \omega$ é um cardinal por ???. Supondo que $\aleph_\alpha$ e $\beth_\alpha$ são ambos cardinais, $\aleph_{\alpha+1}$ e $\beth_{\alpha+1}$ estão explicitamente definidos como cardinais. E a união de um conjunto de cardinais é um cardinal, por ???. $\square$

Além disso, todo o cardinal infinito é um $\aleph$:

Proposição card-arithmetic.3. Se $\aleph$ é um cardinal infinito, então $\aleph = \aleph_\gamma$ para um certo γ único.

Prova. Por indução transfinita nos cardinais. Para a indução, suponhamos que se $\mathfrak{b} < \aleph$ então $\mathfrak{b} = \aleph_{\gamma_{\mathfrak{b}}}$. Se $\aleph = \mathfrak{b}^\oplus$ para algum $\mathfrak{b}$, então $\aleph = (\aleph_{\gamma_{\mathfrak{b}}})^\oplus = \aleph_{\gamma_{\mathfrak{b}}+1}$. Se $\aleph$ não é o sucessor de nenhum cardinal, então, por serem os cardinais ordinais, $\aleph = \bigcup_{\mathfrak{b} < \aleph} \mathfrak{b} = \bigcup_{\mathfrak{b} < \aleph} \aleph_{\gamma_{\mathfrak{b}}}$, logo $\aleph = \aleph_\gamma$ onde $\gamma = \bigcup_{\mathfrak{b} < \aleph} \gamma_{\mathfrak{b}}$. $\square$

¹Peirce usou esta notação numa carta a Cantor de dezembro de 1900. Infelizmente, Peirce também apresentou ali um mau argumento de que $\beth_\alpha$ não existe para $\alpha \geq \omega$.

Como todo o cardinal infinito é um $\aleph$, surge naturalmente a pergunta: será que todo o cardinal infinito é um $\beth$? Certamente que, se isso *se verificasse*, os cardinais infinitos “comportar-se-iam de forma simples” com a operação de tomar conjuntos potência. De fato, teríamos o seguinte:

Hipótese Generalizada do Contínuo (HGC). $\aleph_\alpha = \beth_\alpha$, para todo o α .

Além disso, se a HGC valesse, poderíamos simplificar bastante a exponenciação cardinal. Em particular, poderíamos mostrar que, quando $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$, o valor de $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ fica encerrado entre $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \leq \mathfrak{a}^{\oplus}$. Poderíamos então dar condições precisas que determinam qual das duas possibilidades se verifica (isto é, se $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ ou $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}^{\oplus}$).²

Mas a HGC é uma *hipótese*, não um *teorema*. De fato, Gödel (1938) provou que, se **ZFC** for consistente, então também o é **ZFC** + HGC. Mas mais tarde verificou-se que podemos acrescentar igualmente $\neg$ HGC a **ZFC**. De fato, considere-se a *instância* não trivial mais simples da HGC, nomeadamente:

Hipótese do Contínuo (HC). $\aleph_1 = \beth_1$.

Cohen (1963) provou que, se **ZFC** for consistente, então também o é **ZFC** + $\neg$ HC. Logo a Hipótese do Contínuo é independente de **ZFC**.

A Hipótese do Contínuo chama-se assim porque “o contínuo” é outro nome para a reta real, $\mathbb{R}$. ?? nos diz que $|\mathbb{R}| = \beth_1$. Assim, a Hipótese do Contínuo afirma que não há cardinal entre a cardinalidade dos números naturais, $\aleph_0 = \beth_0$, e a cardinalidade do contínuo, $\beth_1$.

Dada a *independência* da (H)HC relativamente a **ZFC**, o que devemos dizer sobre a sua *verdade*? Há *muito* a dizer. De fato, muito trabalho recente e fecundo em teoria dos conjuntos tem sido dedicado a estas questões. Mas dois pontos rápidos valem certamente a pena enfatizar.

Primeiro: não se segue *imediatamente* destes resultados formais de independência que a HGC ou a HC sejam *indeterminadas* no valor de verdade. Afinal, talvez bastem mais axiomas, que nos pareçam naturais, para decidir a questão num sentido ou noutro. O próprio Gödel sugeriu que essa era a resposta adequada.

Segundo: a independência da HC relativamente a **ZFC** é certamente *notável*, mas não é *inacreditável* (no sentido literal). O ponto é simplesmente que, para tudo o que **ZFC** nos diz, passar de um cardinal ao seu sucessor pode envolver uma ferramenta menos direta do que simplesmente tomar conjuntos potência.

Feitas estas duas observações, quem quiser saber mais terá de recorrer aos vários filósofos e matemáticos com cavalos na corrida.³

²A condição é ditada pela *cofinalidade*.

³Embora possa querer começar por ler Potter (2004, §15.6).

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Cohen, Paul J. 1963. The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 24: 556–557.

Gödel, Kurt. 1938. The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 50: 1143–8.

Potter, Michael. 2004. *Set Theory and its Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.