

Parte I

Propositional Logic

This part contains material on classical propositional logic. The first chapter is relatively rudimentary and just lists definitions and results, many proofs are not carried out but are left as exercises. The material on proof systems and the completeness theorem is included from the part on first-order logic, with the “FOL” tag set to false. This leaves out everything related to predicates, terms, and quantifiers, and replaces talk of **estruturas** $\mathfrak{M}$ with talk about **valorações** $\mathfrak{v}$.

It is planned to expand this part to include more detail, and to add further topics and results, such as truth-functional completeness.

Capítulo 1

Syntax and Semantics

This is a very quick summary of definitions only. It should be expanded to provide a gentle intro to proofs by induction on formulas, with lots more examples.

-NoValue-

1.1 Introduction

pl:syn:int:
sec Propositional logic deals with **fórmulas** that are built from **variáveis proposicionais** using the propositional connectives $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, and $\leftrightarrow$. Intuitively, a **variável proposicional** p stands for a sentence or proposition that is true or false. Whenever the “truth value” of the **variável proposicional** in a **fórmula** is determined, so is the truth value of any **fórmulas** formed from them using propositional connectives. We say that propositional logic is *truth functional*, because its semantics is given by functions of truth values. In particular, in propositional logic we leave out of consideration any further determination of truth and falsity, p.ex., whether something is necessarily true rather than just contingently true, or whether something is known to be true, or whether something is true now rather than was true or will be true. We only consider two truth values true ($\mathbb{T}$) and false ($\mathbb{F}$), and so exclude from discussion the possibility that a statement may be neither true nor false, or only half true. We also concentrate only on connectives where the truth value of a **fórmula** built from them is completely determined by the truth values of its parts (and not, say, on its meaning). In particular, whether the truth value of conditionals in English is truth functional in this sense is contentious. The material conditional $\rightarrow$ is; other logics deal with conditionals that are not truth functional.

In order to develop the theory and metatheory of truth-functional propositional logic, we must first define the syntax and semantics of its expressions. We will describe one way of constructing **fórmulas** from **variáveis proposicio-**

naís using the connectives. Alternative definitions are possible. Other systems will choose different symbols, will select different sets of connectives as primitive, and will use parentheses differently (or even not at all, as in the case of so-called Polish notation). What all approaches have in common, though, is that the formation rules define the set of **fórmulas** *inductively*. If done properly, every expression can result essentially in only one way according to the formation rules. The inductive definition resulting in expressions that are *uniquely readable* means we can give meanings to these expressions using the same method—inductive definition.

Giving the meaning of expressions is the domain of semantics. The central concept in semantics for propositional logic is that of satisfaction in a **valoração**. A **valoração** $\mathbf{v}$ assigns truth values $\mathbb{T}, \mathbb{F}$ to the **variáveis proposicionais**. Any **valoração** determines a truth value $\bar{\mathbf{v}}(\varphi)$ for any **fórmula** φ . A **fórmula** is satisfied in a **valoração** $\mathbf{v}$ iff $\bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbb{T}$ —we write this as $\mathbf{v} \models \varphi$. This relation can also be defined by induction on the structure of φ , using the truth functions for the logical connectives to define, say, satisfaction of $\varphi \wedge \psi$ in terms of satisfaction (or not) of φ and ψ .

On the basis of the satisfaction relation $\mathbf{v} \models \varphi$ for sentences we can then define the basic semantic notions of tautology, entailment, and satisfiability. A **fórmula** is a tautology, $\models \varphi$, if every **valoração** satisfies it, O.s., $\bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbb{T}$ for any $\mathbf{v}$. It is entailed by a set of **fórmulas**, $\Gamma \models \varphi$, if every **valoração** that satisfies all the **fórmulas** in Γ also satisfies φ . And a set of **fórmulas** is satisfiable if some **valoração** satisfies all **fórmulas** in it at the same time. Because **fórmulas** are inductively defined, and satisfaction is in turn defined by induction on the structure of **fórmulas**, we can use induction to prove properties of our semantics and to relate the semantic notions defined.

-NoValue-

1.2 Propositional Fórmulas

Fórmulas of propositional logic are built up from **variáveis proposicionais**, the propositional constant $\perp$ and the propositional constant $\top$ using *logical connectives*. pl:syn:fml:
sec

1. A **infinito enumerável** set At_0 of **variáveis proposicionais** $p_0, p_1, \dots$
2. The propositional constant for **falsidade** $\perp$.
3. The propositional constant for **verdade** $\top$.
4. The logical connectives: $\neg$ (negation), $\wedge$ (conjunction), $\vee$ (disjunction), $\rightarrow$ (**condicional**), $\leftrightarrow$ (**bicondicional**)
5. Punctuation marks: $(,)$, and the comma.

We denote this language of propositional logic by $\mathcal{L}_0$.

You may be familiar with different terminology and symbols than the ones we use above. Logic texts (and teachers) commonly use either $\sim$, $\neg$, and $!$ for “negation”, $\wedge$, $\cdot$, and $\&$ for “conjunction”. Commonly used symbols for the “conditional” or “implication” are $\rightarrow$, $\Rightarrow$, and $\supset$. Symbols for “biconditional,” “bi-implication,” or “(material) equivalence” are $\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$, and $\equiv$. The $\perp$ symbol is variously called “falsity,” “falsum,” “absurdity,” or “bottom.” The $\top$ symbol is variously called “truth,” “verum,” or “top.”

pl:syn:fml:
defn:formulas

Definição 1.1 (Formula). The set $\text{Frm}(\mathcal{L}_0)$ of *fórmulas* of propositional logic is defined inductively as follows:

1. $\perp$ is an atomic *fórmula*.
2. $\top$ is an atomic *fórmula*.
3. Every *variável proposicional* p_i is an atomic *fórmula*.
4. If φ is a *fórmula*, then $\neg\varphi$ is a *fórmula*.
5. If φ and ψ are *fórmulas*, then $(\varphi \wedge \psi)$ is a *fórmula*.
6. If φ and ψ are *fórmulas*, then $(\varphi \vee \psi)$ is a *fórmula*.
7. If φ and ψ are *fórmulas*, then $(\varphi \rightarrow \psi)$ is a *fórmula*.
8. If φ and ψ are *fórmulas*, then $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ is a *fórmula*.
9. Nothing else is a *fórmula*.

The definition of *fórmulas* is an *inductive definition*. Essentially, we construct the set of *fórmulas* in infinitely many stages. In the initial stage, we pronounce all atomic formulas to be formulas; this corresponds to the first few cases of the definition, O.s., the cases for $\top$, $\perp$, p_i . “Atomic *fórmula*” thus means any *fórmula* of this form.

The other cases of the definition give rules for constructing new *fórmulas* out of *fórmulas* already constructed. At the second stage, we can use them to construct *fórmulas* out of atomic *fórmulas*. At the third stage, we construct new formulas from the atomic formulas and those obtained in the second stage, and so on. A *fórmula* is anything that is eventually constructed at such a stage, and nothing else.

When writing a formula $(\psi * \chi)$ constructed from ψ , χ using a two-place connective $*$, we will often leave out the outermost pair of parentheses and write simply $\psi * \chi$.

Definição 1.2 (Syntactic identity). The symbol $\equiv$ expresses syntactic identity between strings of symbols, O.s., $\varphi \equiv \psi$ iff φ and ψ are strings of symbols of the same length and which contain the same symbol in each place.

The $\equiv$ symbol may be flanked by strings obtained by concatenation, p.ex., $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$ means: the string of symbols φ is the same string as the one obtained by concatenating an opening parenthesis, the string ψ , the $\vee$ symbol, the string χ , and a closing parenthesis, in this order. If this is the case, then we know that the first symbol of φ is an opening parenthesis, φ contains ψ as a substring (starting at the second symbol), that substring is followed by $\vee$, etc.

-NoValue-

1.3 Preliminaries

Teorema 1.3 (Principle of induction on fórmulas). *If some property P holds for all the atomic fórmulas and is such that*

pl:syn:pre:
sec
pl:syn:pre:
thm:induction

1. *it holds for $\neg\varphi$ whenever it holds for φ ;*
2. *it holds for $(\varphi \wedge \psi)$ whenever it holds for φ and ψ ;*
3. *it holds for $(\varphi \vee \psi)$ whenever it holds for φ and ψ ;*
4. *it holds for $(\varphi \rightarrow \psi)$ whenever it holds for φ and ψ ;*
5. *it holds for $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ whenever it holds for φ and ψ ;*

then P holds for all fórmulas.

Prova. Let S be the collection of all fórmulas with property P . Clearly $S \subseteq \text{Frm}(\mathcal{L}_0)$. S satisfies all the conditions of Definição 1.1: it contains all atomic fórmulas and is closed under the operadores lógicos. $\text{Frm}(\mathcal{L}_0)$ is the smallest such class, so $\text{Frm}(\mathcal{L}_0) \subseteq S$. So $\text{Frm}(\mathcal{L}_0) = S$, and every formula has property P . $\square$

Proposição 1.4. *Any fórmula in $\text{Frm}(\mathcal{L}_0)$ is balanced, in that it has as many left parentheses as right ones.*

pl:syn:pre:
prop:balanced

Problema 1.1. Prove Proposição 1.4

Proposição 1.5. *No proper initial segment of a fórmula is a fórmula.*

pl:syn:pre:
prop:noinit

Problema 1.2. Prove Proposição 1.5

Proposição 1.6 (Unique Readability). *Any fórmula φ in $\text{Frm}(\mathcal{L}_0)$ has exactly one parsing as one of the following*

1. $\perp$.
2. $\top$.
3. p_n for some $p_n \in \text{At}_0$.

4. $\neg\psi$ for some *fórmula* ψ .
5. $(\psi \wedge \chi)$ for some *fórmulas* ψ and χ .
6. $(\psi \vee \chi)$ for some *fórmulas* ψ and χ .
7. $(\psi \rightarrow \chi)$ for some *fórmulas* ψ and χ .
8. $(\psi \leftrightarrow \chi)$ for some *fórmulas* ψ and χ .

Moreover, this parsing is unique.

Prova. By induction on φ . For instance, suppose that φ has two distinct readings as $(\psi \rightarrow \chi)$ and $(\psi' \rightarrow \chi')$. Then ψ and ψ' must be the same (or else one would be a proper initial segment of the other); so if the two readings of φ are distinct it must be because χ and χ' are distinct readings of the same sequence of symbols, which is impossible by the inductive hypothesis. $\square$

Definição 1.7 (Uniform Substitution). If φ and ψ are *fórmulas*, and p_i is a *variável proposicional*, then $\varphi[\psi/p_i]$ denotes the result of replacing each occurrence of p_i by an occurrence of ψ in φ ; similarly, the simultaneous substitution of $p_1, \dots, p_n$ by *fórmulas* $\psi_1, \dots, \psi_n$ is denoted by $\varphi[\psi_1/p_1, \dots, \psi_n/p_n]$.

Problema 1.3. For each of the five *fórmulas* below determine whether the *fórmula* can be expressed as a substitution $\varphi[\psi/p_i]$ where φ is (i) p_0 ; (ii) $(\neg p_0 \wedge p_1)$; and (iii) $((\neg p_0 \rightarrow p_1) \wedge p_2)$. In each case specify the relevant substitution.

1. p_1
2. $(\neg p_0 \wedge p_0)$
3. $((p_0 \vee p_1) \wedge p_2)$
4. $\neg((p_0 \rightarrow p_1) \wedge p_2)$
5. $((\neg(p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow (p_0 \vee p_1)) \wedge \neg(p_0 \wedge p_1))$

Problema 1.4. Give a mathematically rigorous definition of $\varphi[\psi/p]$ by induction.

-NoValue-

1.4 Formation Sequences

pl:syn:fseq:
sec

Defining *fórmulas* via an inductive definition, and the complementary technique of proving properties of *fórmulas* via induction, is an elegant and efficient approach. However, it can also be useful to consider a more bottom-up, step-by-step approach to the construction of *fórmulas*, which we do here using the notion of a *formation sequence*.

Definição 1.8 (Formation sequences for formulas). A finite sequence $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_n \rangle$ of strings of symbols from the language $\mathcal{L}_0$ is a *formation sequence* for φ if $\varphi \equiv \varphi_n$ and for all $i \leq n$, either φ_i is an atomic formula or there exist $j, k < i$ such that one of the following holds:

1. $\varphi_i \equiv \neg \varphi_j$.
2. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \wedge \varphi_k)$.
3. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \vee \varphi_k)$.
4. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \rightarrow \varphi_k)$.
5. $\varphi_i \equiv (\varphi_j \leftrightarrow \varphi_k)$.

Exemplo 1.9.

$$\langle p_0, p_1, (p_1 \wedge p_0), \neg(p_1 \wedge p_0) \rangle$$

is a formation sequence of $\neg(p_1 \wedge p_0)$, as is

$$\langle p_0, p_1, p_0, (p_1 \wedge p_0), (p_0 \rightarrow p_1), \neg(p_1 \wedge p_0) \rangle.$$

As can be seen from the second example, formation sequences may contain ‘junk’: formulas which are redundant or do not contribute to the construction.

Proposição 1.10. Every *fórmula* φ in $\text{Frm}(\mathcal{L}_0)$ has a formation sequence.

pl:syn:fseq:
prop:formed

Prova. Suppose φ is atomic. Then the sequence $\langle \varphi \rangle$ is a formation sequence for φ . Now suppose that ψ and χ have formation sequences $\langle \psi_0, \dots, \psi_n \rangle$ and $\langle \chi_0, \dots, \chi_m \rangle$ respectively.

1. If $\varphi \equiv \neg \psi$, then $\langle \psi_0, \dots, \psi_n, \neg \psi_n \rangle$ is a formation sequence for φ .
2. If $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$, then $\langle \psi_0, \dots, \psi_n, \chi_0, \dots, \chi_m, (\psi_n \wedge \chi_m) \rangle$ is a formation sequence for φ .
3. If $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$, then $\langle \psi_0, \dots, \psi_n, \chi_0, \dots, \chi_m, (\psi_n \vee \chi_m) \rangle$ is a formation sequence for φ .
4. If $\varphi \equiv (\psi \rightarrow \chi)$, then $\langle \psi_0, \dots, \psi_n, \chi_0, \dots, \chi_m, (\psi_n \rightarrow \chi_m) \rangle$ is a formation sequence for φ .
5. If $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$, then $\langle \psi_0, \dots, \psi_n, \chi_0, \dots, \chi_m, (\psi_n \leftrightarrow \chi_m) \rangle$ is a formation sequence for φ .

By the principle of induction on *fórmulas*, every *fórmula* has a formation sequence. $\square$

We can also prove the converse. This is important because it shows that our two ways of defining formulas are equivalent: they give the same results. It also means that we can prove theorems about formulas by using ordinary induction on the length of formation sequences.

pl:syn:fseq:
lem:fseq-init

Lema 1.11. Suppose that $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_n \rangle$ is a formation sequence for φ_n , and that $k \leq n$. Then $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_k \rangle$ is a formation sequence for φ_k .

Prova. Exercise. □

pl:syn:fseq:
thm:fseq-frm-equiv

Teorema 1.12. $\text{Frm}(\mathcal{L}_0)$ is the set of all strings of symbols in the language $\mathcal{L}_0$ with a formation sequence.

Prova. Let F be the set of all strings of symbols in the language $\mathcal{L}_0$ that have a formation sequence. We have seen in [Proposição 1.10](#) that $\text{Frm}(\mathcal{L}_0) \subseteq F$, so now we prove the converse.

Suppose φ has a formation sequence $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_n \rangle$. We prove that $\varphi \in \text{Frm}(\mathcal{L}_0)$ by strong induction on n . Our induction hypothesis is that every string of symbols with a formation sequence of length $m < n$ is in $\text{Frm}(\mathcal{L}_0)$. By the definition of a formation sequence, either φ_n is atomic or there must exist $j, k < n$ such that one of the following is the case:

1. $\varphi_n \equiv \neg \varphi_j$.
2. $\varphi_n \equiv (\varphi_j \wedge \varphi_k)$.
3. $\varphi_n \equiv (\varphi_j \vee \varphi_k)$.
4. $\varphi_n \equiv (\varphi_j \rightarrow \varphi_k)$.
5. $\varphi_n \equiv (\varphi_j \leftrightarrow \varphi_k)$.

Now we reason by cases. If φ_n is atomic then $\varphi_n \in \text{Frm}(\mathcal{L}_0)$. Suppose instead that $\varphi \equiv (\varphi_j \wedge \varphi_k)$. By [Lema 1.11](#), $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_j \rangle$ and $\langle \varphi_0, \dots, \varphi_k \rangle$ are formation sequences for φ_j and φ_k respectively. Since these are proper initial subsequences of the formation sequence for φ , they both have length less than n . Therefore by the induction hypothesis, φ_j and φ_k are in $\text{Frm}(\mathcal{L}_0)$, and so by the definition of a [fórmula](#), so is $(\varphi_j \wedge \varphi_k)$. The other cases follow by parallel reasoning. □

-NoValue-

1.5 Valorações and Satisfaction

pl:syn:val:
sec

Definição 1.13 (Valorações). Let $\{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ be the set of the two truth values, “true” and “false.” A *valoração* for $\mathcal{L}_0$ is a function $\mathbf{v}$ assigning either $\mathbb{T}$ or $\mathbb{F}$ to the [variáveis proposicionais](#) of the language, O.s., $\mathbf{v}: \text{At}_0 \rightarrow \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$.

Definição 1.14. Given a **valoração** $\mathbf{v}$, define the evaluation function $\bar{\mathbf{v}}: \text{Frm}(\mathcal{L}_0) \rightarrow \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ inductively by:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}}(\perp) &= \mathbb{F}; \\ \bar{\mathbf{v}}(\top) &= \mathbb{T}; \\ \bar{\mathbf{v}}(p_n) &= \mathbf{v}(p_n); \\ \bar{\mathbf{v}}(\neg\varphi) &= \begin{cases} \mathbb{T} & \text{if } \bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbb{F}; \\ \mathbb{F} & \text{otherwise.} \end{cases} \\ \bar{\mathbf{v}}(\varphi \wedge \psi) &= \begin{cases} \mathbb{T} & \text{if } \bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbb{T} \text{ and } \bar{\mathbf{v}}(\psi) = \mathbb{T}; \\ \mathbb{F} & \text{if } \bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbb{F} \text{ or } \bar{\mathbf{v}}(\psi) = \mathbb{F}. \end{cases} \\ \bar{\mathbf{v}}(\varphi \vee \psi) &= \begin{cases} \mathbb{T} & \text{if } \bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbb{T} \text{ or } \bar{\mathbf{v}}(\psi) = \mathbb{T}; \\ \mathbb{F} & \text{if } \bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbb{F} \text{ and } \bar{\mathbf{v}}(\psi) = \mathbb{F}. \end{cases} \\ \bar{\mathbf{v}}(\varphi \rightarrow \psi) &= \begin{cases} \mathbb{T} & \text{if } \bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbb{F} \text{ or } \bar{\mathbf{v}}(\psi) = \mathbb{T}; \\ \mathbb{F} & \text{if } \bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbb{T} \text{ and } \bar{\mathbf{v}}(\psi) = \mathbb{F}. \end{cases} \\ \bar{\mathbf{v}}(\varphi \leftrightarrow \psi) &= \begin{cases} \mathbb{T} & \text{if } \bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \bar{\mathbf{v}}(\psi); \\ \mathbb{F} & \text{if } \bar{\mathbf{v}}(\varphi) \neq \bar{\mathbf{v}}(\psi). \end{cases}\end{aligned}$$

explanation

The clauses correspond to the following truth tables:

φ	$\neg\varphi$	φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$	φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$

Problema 1.5. Consider adding to $\mathcal{L}_0$ a ternary connective $\diamond$ with evaluation given by

$$\bar{\mathbf{v}}(\diamond(\varphi, \psi, \chi)) = \begin{cases} \bar{\mathbf{v}}(\psi) & \text{if } \bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbb{T}; \\ \bar{\mathbf{v}}(\chi) & \text{if } \bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbb{F}. \end{cases}$$

Write down the truth table for this connective.

Teorema 1.15 (Local Determination). Suppose that $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ are **valorações** that agree on the **variáveis proposicionais** occurring in φ , *O.s.*, $\mathbf{v}_1(p_n) = \mathbf{v}_2(p_n)$ whenever p_n occurs in some **fórmula** φ . Then $\bar{\mathbf{v}}_1$ and $\bar{\mathbf{v}}_2$ also agree on φ , *O.s.*, $\bar{\mathbf{v}}_1(\varphi) = \bar{\mathbf{v}}_2(\varphi)$. pl:syn:val: thm:LocalDetermination

Prova. By induction on φ . □

pl:syn:val:
defn:satisfaction

Definição 1.16 (Satisfaction). We can inductively define the notion of *satisfaction of a fórmula* φ by a *valoração* $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \models \varphi$, as follows. (We write $\mathbf{v} \not\models \varphi$ to mean “not $\mathbf{v} \models \varphi$.”)

1. $\varphi \equiv \perp$: $\mathbf{v} \not\models \varphi$.
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathbf{v} \models \varphi$.
3. $\varphi \equiv p_i$: $\mathbf{v} \models \varphi$ iff $\mathbf{v}(p_i) = \mathbb{T}$.
4. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathbf{v} \models \varphi$ iff $\mathbf{v} \not\models \psi$.
5. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\mathbf{v} \models \varphi$ iff $\mathbf{v} \models \psi$ and $\mathbf{v} \models \chi$.
6. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\mathbf{v} \models \varphi$ iff $\mathbf{v} \models \psi$ or $\mathbf{v} \models \chi$ (or both).
7. $\varphi \equiv (\psi \rightarrow \chi)$: $\mathbf{v} \models \varphi$ iff $\mathbf{v} \not\models \psi$ or $\mathbf{v} \models \chi$ (or both).
8. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathbf{v} \models \varphi$ iff either both $\mathbf{v} \models \psi$ and $\mathbf{v} \models \chi$, or neither $\mathbf{v} \models \psi$ nor $\mathbf{v} \models \chi$.

If Γ is a set of *fórmulas*, $\mathbf{v} \models \Gamma$ iff $\mathbf{v} \models \varphi$ for every $\varphi \in \Gamma$.

pl:syn:val:
prop:sat-value

Proposição 1.17. $\mathbf{v} \models \varphi$ iff $\bar{\mathbf{v}}(\varphi) = \mathbb{T}$.

Prova. By induction on φ . □

Problema 1.6. Prove **Proposição 1.17**

-NoValue-

1.6 Semantic Notions

pl:syn:sem:
sec

We define the following semantic notions:

- Definição 1.18.**
1. A *fórmula* φ is *satisfiable* if for some $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \models \varphi$; it is *unsatisfiable* if for no $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \models \varphi$;
 2. A *fórmula* φ is a *tautology* if $\mathbf{v} \models \varphi$ for all *valorações* $\mathbf{v}$;
 3. A *fórmula* φ is *contingent* if it is satisfiable but not a tautology;
 4. If Γ is a set of *fórmulas*, $\Gamma \models \varphi$ (“ Γ entails φ ”) if and only if $\mathbf{v} \models \varphi$ for every *valoração* $\mathbf{v}$ for which $\mathbf{v} \models \Gamma$.
 5. If Γ is a set of *fórmulas*, Γ is *satisfiable* if there is a *valoração* $\mathbf{v}$ for which $\mathbf{v} \models \Gamma$, and Γ is *unsatisfiable* otherwise.

Problema 1.7. For each of the following four *fórmulas* determine whether it is (a) satisfiable, (b) tautology, and (c) contingent.

1. $(p_0 \rightarrow (\neg p_1 \rightarrow \neg p_0))$.
2. $((p_0 \wedge \neg p_1) \rightarrow (\neg p_0 \wedge p_2)) \leftrightarrow ((p_2 \rightarrow p_0) \rightarrow (p_0 \rightarrow p_1))$.
3. $(p_0 \leftrightarrow p_1) \rightarrow (p_2 \leftrightarrow \neg p_1)$.
4. $((p_0 \leftrightarrow (\neg p_1 \wedge p_2)) \vee (p_2 \rightarrow (p_0 \leftrightarrow p_1)))$.

Proposição 1.19.

*pl:syn:sem:
prop:semanticalfacts*

1. φ is a tautology if and only if $\emptyset \models \varphi$;
2. If $\Gamma \models \varphi$ and $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ then $\Gamma \models \psi$;
3. If Γ is satisfiable then every finite subset of Γ is also satisfiable;
4. Monotonicity: if $\Gamma \subseteq \Delta$ and $\Gamma \models \varphi$ then also $\Delta \models \varphi$;
5. Transitivity: if $\Gamma \models \varphi$ and $\Delta \cup \{\varphi\} \models \psi$ then $\Gamma \cup \Delta \models \psi$.

*pl:syn:sem:
def:monotonicity
pl:syn:sem:
def:Cut*

Prova. Exercise. □

Problema 1.8. Prove **Proposição 1.19**

Proposição 1.20. $\Gamma \models \varphi$ if and only if $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is unsatisfiable.

*pl:syn:sem:
prop:entails-unsat*

Prova. Exercise. □

Problema 1.9. Prove **Proposição 1.20**

Teorema 1.21 (Semantic Deduction Theorem). $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ if and only if $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$.

*pl:syn:sem:
thm:sem-deduction*

Prova. Exercise. □

Problema 1.10. Prove **Teorema 1.21**

Capítulo 2

Sistemas de Derivação

Este capítulo reúne material geral sobre sistemas de derivação. Um livro-texto que usa um sistema específico pode inserir a seção de introdução mais a seção de panorama relevante no início do capítulo que introduz esse sistema.

2.1 Introdução

pl:prf:int:
sec

As lógicas comumente têm tanto uma semântica quanto um sistema de derivação. A semântica trata de conceitos como verdade, satisfatibilidade, validade e consequência. O propósito dos sistemas de derivação é fornecer um método puramente sintático de estabelecer consequência e validade. Eles são puramente sintáticos no sentido de que uma derivação em tal sistema é um objeto sintático finito, geralmente uma sequência (ou outra disposição finita) de sentenças ou fórmulas. Bons sistemas de derivação têm a propriedade de que qualquer sequência ou disposição dada de sentenças ou fórmulas pode ser verificada mecanicamente como “correta”.

Os sistemas de derivação mais simples (e historicamente os primeiros) para a lógica de primeira ordem foram *axiomáticos*. Uma sequência de fórmulas conta como uma derivação em tal sistema se cada fórmula individual nela é ou está entre um conjunto fixo de “axiomas” ou segue de fórmulas anteriores na sequência por uma entre um número fixo de “regras de inferência”—e pode ser verificado mecanicamente se uma fórmula é um axioma e se segue corretamente de outras fórmulas por uma das regras de inferência. Sistemas de derivação axiomáticos são fáceis de descrever—e também fáceis de tratar meta-teoricamente—mas as derivações neles são difíceis de ler e entender, e também difíceis de produzir.

Outros sistemas de derivação foram desenvolvidos com o objetivo de facilitar a construção de derivações ou facilitar a compreensão de derivações uma vez completas. Exemplos são a dedução natural, árvores de verdade, também

conhecidas como provas por tableaux, e o cálculo de sequentes. Alguns sistemas de *derivação* são projetados especialmente com a mecanização em mente; por exemplo, o método da resolução é fácil de implementar em software (mas suas *derivações* são essencialmente impossíveis de entender). A maioria desses outros sistemas de *derivação* representa *derivações* como árvores de *fórmulas* em vez de sequências. Isso facilita ver quais partes de uma *derivação* dependem de quais outras partes.

Assim, para uma dada lógica, como a lógica de primeira ordem, os diferentes sistemas de *derivação* darão diferentes explicações do que significa uma *sentença* ser um *teorema* e o que significa uma *sentença* ser *derivável* a partir de outras. Seja como for feito isso (via *derivações* axiomáticas, deduções naturais, *derivações* de sequentes, árvores de verdade, refutações por resolução), queremos que essas relações correspondam às noções semânticas de validade e consequência. Escrevamos $\vdash \varphi$ para “ φ é um teorema” e “ $\Gamma \vdash \varphi$ ” para “ φ é *derivável* de Γ .” Seja como for $\vdash$ definido, queremos que corresponda a $\models$, isto é:

1. $\vdash \varphi$ se, e somente se, $\models \varphi$
2. $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \models \varphi$

A direção “somente se” acima é chamada de *correção*. Um sistema de *derivação* é correto se a *derivabilidade* garante consequência (ou validade). Todo sistema de *derivação* decente tem que ser correto; sistemas de *derivação* incorretos não são úteis de modo algum. Afinal, o propósito inteiro de uma *derivação* é fornecer uma garantia sintática de validade ou consequência. Provaremos a correção para os sistemas de *derivação* que apresentamos.

A direção converso “se” também é importante: é chamada de *completude*. Um sistema de *derivação* completo é forte o suficiente para mostrar que φ é um teorema sempre que φ é válida, e que $\Gamma \vdash \varphi$ sempre que $\Gamma \models \varphi$. A completude é mais difícil de estabelecer, e algumas lógicas não têm sistemas de *derivação* completos. A lógica de primeira ordem tem. Kurt Gödel foi o primeiro a provar a completude para um sistema de *derivação* da lógica de primeira ordem em sua dissertação de 1929.

Outro conceito ligado aos sistemas de *derivação* é o de *consistência*. Um conjunto de *sentenças* é chamado inconsistente se qualquer coisa pode ser *derivada* dele, e consistente caso contrário. A inconsistência é a contrapartida sintática da insatisfatibilidade: como conjuntos insatisfatíveis, conjuntos inconsistentes de *sentenças* não fazem boas teorias; são defeituosos de maneira fundamental. Conjuntos consistentes de *sentenças* podem não ser verdadeiros ou úteis, mas pelo menos passam esse limiar mínimo de utilidade lógica. Para diferentes sistemas de *derivação*, a definição específica de consistência de conjuntos de *sentenças* pode diferir, mas como $\vdash$, queremos que a consistência coincida com sua contrapartida semântica, a satisfatibilidade. Queremos que seja sempre o caso que Γ é consistente se, e somente se, é satisfatível. Aqui, a direção “somente se” corresponde à completude (consistência garante satisfatibilidade), e a direção “se” corresponde à correção (satisfatibilidade garante

consistência). De fato, para a lógica clássica de primeira ordem, as duas versões de correção e completude são equivalentes.

2.2 O Cálculo de Sequentes

pl:prf:seq:sec Enquanto muitos sistemas de **derivação** operam com disposições de **sentenças**, o cálculo de sequentes opera com *sequentes*. Um sequente é uma expressão da forma

$$\varphi_1, \dots, \varphi_m \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_n,$$

isto é, um par de seqüências de **sentenças**, separadas pelo símbolo de sequente $\Rightarrow$. Qualquer uma das seqüências pode ser vazia. Uma **derivação** no cálculo de sequentes é uma árvore de sequentes, em que os sequentes mais altos são de uma forma especial (são chamados de “sequentes iniciais” ou “axiomas”) e todo outro sequente segue dos sequentes imediatamente acima dele por uma das regras de inferência. As regras de inferência ou manipulam as **sentenças** nos sequentes (adicionando, removendo ou rearranjando-as à esquerda ou à direita), ou introduzem uma **fórmula** complexa na conclusão da regra. Por exemplo, a regra $\wedge L$ permite a inferência de $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ para $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, e a $\rightarrow R$ permite a inferência de $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ para $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$, para quaisquer Γ, Δ, φ e ψ . (Em particular, Γ e Δ podem ser vazios.)

A relação $\vdash$ baseada no cálculo de sequentes é definida da seguinte forma: $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, há alguma seqüência Γ_0 tal que toda φ em Γ_0 está em Γ e há uma **derivação** com o sequente $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ em sua raiz. φ é um teorema no cálculo de sequentes se o sequente $\Rightarrow \varphi$ tem uma **derivação**. Por exemplo, aqui está uma **derivação** que mostra que $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$:

$$\frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \wedge L}{\Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi} \rightarrow R$$

Um conjunto Γ é inconsistente no cálculo de sequentes se há uma **derivação** de $\Gamma_0 \Rightarrow$ (em que toda $\varphi \in \Gamma_0$ está em Γ e o lado direito do sequente é vazio). Usando a regra WR , qualquer **sentença** pode ser **derivada** a partir de um conjunto inconsistente.

O cálculo de sequentes foi inventado na década de 1930 por Gerhard Gentzen. Por causa de seu desenho sistemático e simétrico, é um formalismo muito útil para desenvolver uma teoria de **derivações**. É relativamente fácil encontrar **derivações** no cálculo de sequentes, mas essas **derivações** são frequentemente difíceis de ler e sua conexão com provas às vezes não é fácil de ver. Provou ser uma abordagem muito elegante a sistemas de **derivação**, no entanto, e muitas lógicas têm sistemas de cálculo de sequentes.

2.3 Dedução Natural

pl:prf:ntd:sec

A dedução natural é um sistema de **derivação** destinado a espelhar o raciocínio real (especialmente o tipo de raciocínio regimentado empregado por matemáticos). O raciocínio real procede por vários padrões “naturais”. Por exemplo, a prova por casos nos permite estabelecer uma conclusão com base em uma premissa disjuntiva, estabelecendo que a conclusão segue de qualquer um dos disjuntos. A prova indireta nos permite estabelecer uma conclusão mostrando que sua negação leva a uma contradição. A prova condicional estabelece uma afirmação condicional “se ... então ...” mostrando que o conseqüente segue do antecedente. A dedução natural é uma formalização de algumas dessas inferências naturais. Cada um dos conectivos lógicos e quantificadores vem com duas regras, uma de introdução e uma de eliminação, e cada uma corresponde a um desses padrões de inferência natural. Por exemplo, $\rightarrow$ Intro corresponde à prova condicional, e $\vee$ Elim à prova por casos. Uma regra particularmente simples é $\wedge$ Elim, que permite a inferência de $\varphi \wedge \psi$ para φ (ou ψ).

Uma característica que distingue a dedução natural de outros sistemas de **derivação** é o uso de hipóteses. Uma **derivação** em dedução natural é uma árvore de **fórmulas**. Uma única **fórmula** fica na raiz da árvore de **fórmulas**, e as “folhas” da árvore são **fórmulas** das quais a conclusão é derivada. Na dedução natural, algumas **fórmulas** folha desempenham um papel dentro da **derivação**, mas são “consumidas” quando a **derivação** atinge a conclusão. Isso corresponde à prática, no raciocínio real, de introduzir hipóteses que só permanecem em vigor por um curto período. Por exemplo, em uma prova por casos, assumimos a verdade de cada um dos disjuntos; na prova condicional, assumimos a verdade do antecedente; na prova indireta, assumimos a verdade da negação da conclusão. Essa maneira de introduzir hipóteses hipotéticas e depois descartá-las a serviço de estabelecer um passo intermediário é uma marca da dedução natural. As fórmulas nas folhas de uma **derivação** em dedução natural são chamadas de hipóteses, e algumas das regras de inferência podem descartá-las. Por exemplo, se temos uma **derivação** de ψ a partir de algumas hipóteses que incluem φ , então a regra $\rightarrow$ Intro nos permite inferir $\varphi \rightarrow \psi$ e descartar qualquer hipótese da forma φ . (Para acompanhar quais hipóteses são descartadas em quais inferências, rotulamos a inferência e as hipóteses que ela descarta com um número.) As hipóteses que permanecem **não descarregadas** no final da **derivação** são, juntas, suficientes para a verdade da conclusão, de modo que uma **derivação** estabelece que suas hipóteses **não descarregadas** implicam sua conclusão.

A relação $\Gamma \vdash \varphi$ baseada na dedução natural vale se, e somente se, há uma **derivação** em que φ é a última **sentença** na árvore, e toda folha que está **não descarregada** está em Γ . φ é um teorema na dedução natural se, e somente se, há uma **derivação** em que φ é a última sentença e todas as hipóteses são **descarregadas**. Por exemplo, aqui está uma **derivação** que mostra que $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$:

$$1 \frac{\frac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\varphi} \wedge \text{Elim}}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi} \rightarrow \text{Intro}$$

O rótulo 1 indica que a hipótese $\varphi \wedge \psi$ é **descarregada** na inferência $\rightarrow$ Intro.

Um conjunto Γ é inconsistente se, e somente se, $\Gamma \vdash \perp$ na dedução natural. A regra $\perp_I$ faz com que, a partir de um conjunto inconsistente, qualquer **sentença** possa ser **derivada**.

Sistemas de dedução natural foram desenvolvidos por Gerhard Gentzen e Stanisław Jaśkowski na década de 1930, e depois por Dag Prawitz e Frederic Fitch. Porque suas inferências espelham métodos naturais de prova, é favorecida por filósofos. As versões desenvolvidas por Fitch são frequentemente usadas em livros introdutórios de lógica. Na filosofia da lógica, as regras da dedução natural às vezes foram tomadas como dando os significados dos operadores lógicos (“semântica da Teoria da Prova”).

2.4 Tableaux

pl:prf:tab:
sec

Enquanto muitos sistemas de **derivação** operam com disposições de **sentenças**, os **tableaux** operam com **fórmulas assinadas**. A **fórmula assinada** é um par consistindo em um sinal de valor de verdade ($\mathbb{T}$ ou $\mathbb{F}$) e a **sentença**

$$\mathbb{T}\varphi \text{ ou } \mathbb{F}\varphi.$$

A **tableau** consiste em **fórmulas assinadas** dispostas em uma árvore ramificada para baixo. Começa com várias **hipóteses** e continua com **fórmulas assinadas** que resultam de uma das **fórmulas assinadas** acima dela pela aplicação de uma das regras de inferência. Cada regra nos permite adicionar uma ou mais **fórmulas assinadas** ao final de um ramo, ou duas **fórmulas assinadas** lado a lado—neste caso um ramo se divide em dois, com as duas **fórmulas assinadas** adicionadas formando os finais dos dois ramos.

Uma regra aplicada a uma **fórmula assinada** complexa resulta na adição de **fórmulas assinadas** que são sub-**fórmulas** imediatas. Elas vêm em pares, uma regra para cada um dos dois sinais. Por exemplo, a regra $\wedge\mathbb{T}$ se aplica a $\mathbb{T}\varphi \wedge \psi$, e permite a adição tanto das duas **fórmulas assinadas** $\mathbb{T}\varphi$ quanto de $\mathbb{T}\psi$ ao final de qualquer ramo que contém $\mathbb{T}\varphi \wedge \psi$, e a regra $\varphi \wedge \psi\mathbb{F}$ permite que um ramo seja dividido adicionando $\mathbb{F}\varphi$ e $\mathbb{F}\psi$ lado a lado. A **tableau** é fechado se cada um de seus ramos contém um par correspondente de **fórmulas assinadas** $\mathbb{T}\varphi$ e $\mathbb{F}\varphi$.

A relação $\vdash$ baseada em **tableaux** é definida da seguinte forma: $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, há algum conjunto finito $\Gamma_0 = \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$ tal que há um **tableau** fechado para as hipóteses

$$\{\mathbb{F}\varphi, \mathbb{T}\psi_1, \dots, \mathbb{T}\psi_n\}$$

Por exemplo, aqui está um **tableau** fechado que mostra que $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$:

1.	$\mathbb{F}(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\varphi \wedge \psi$	$\rightarrow \mathbb{F} 1$
3.	$\mathbb{F}\varphi$	$\rightarrow \mathbb{F} 1$
4.	$\mathbb{T}\varphi$	$\rightarrow \mathbb{T} 2$
5.	$\mathbb{T}\psi$	$\rightarrow \mathbb{T} 2$
	$\otimes$	

Um conjunto Γ é inconsistente no cálculo de **tableau** se há um **tableau** fechado para hipóteses

$$\{\mathbb{T}\psi_1, \dots, \mathbb{T}\psi_n\}$$

para algum $\psi_i \in \Gamma$.

Os **Tableaux** foram inventados na década de 1950 independentemente por Evert Beth e Jaakko Hintikka, e simplificados e popularizados por Raymond Smullyan. São muito fáceis de usar, pois construir um **tableau** é um procedimento muito sistemático. Por causa da natureza sistemática dos **tableaux**, eles também se prestam à implementação por computador. No entanto, um **tableau** é frequentemente difícil de ler e sua conexão com provas às vezes não é fácil de ver. A abordagem também é bastante geral, e muitas lógicas diferentes têm sistemas de **tableau**. Os **Tableaux** também nos ajudam a encontrar **estruturas** que satisfazem **sentenças** (ou conjuntos de **sentenças**) dadas: se o conjunto é satisfatível, ele não terá um **tableau** fechado, isto é, qualquer **tableau** terá um ramo aberto. A **estrutura** satisfatória pode ser “lida” de um ramo aberto, desde que toda regra que seja possível aplicar tenha sido aplicada naquele ramo. Há também uma conexão muito estreita com o cálculo de seqüentes: essencialmente, um **tableau** fechado é uma **derivação** condensada no cálculo de seqüentes, escrita de cabeça para baixo.

2.5 Dedução Axiomática

As **derivações** axiomáticas são os sistemas de **derivação** lógicos mais antigos e mais simples. Suas **derivações** são simplesmente seqüências de **sentenças**. Uma seqüência de **sentenças** conta como uma **derivação** correta se toda **sentença** φ nela satisfaz uma das seguintes condições:

1. φ é um axioma, ou
2. φ é um **membro** de um dado conjunto Γ de **sentenças**, ou
3. φ é justificada por uma regra de inferência.

Para ser um axioma, φ tem que ter a forma de um entre vários esquemas fixos de **sentença**. Há muitos conjuntos de esquemas de axiomas que fornecem um sistema de **derivação** satisfatório (correto e completo) para a lógica de primeira ordem. Alguns são organizados de acordo com os conectivos que governam, por exemplo, os esquemas

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \quad \psi \rightarrow (\psi \vee \chi) \quad (\psi \wedge \chi) \rightarrow \psi$$

são axiomas comuns que governam $\rightarrow$, $\vee$ e $\wedge$. Alguns sistemas de axiomas visam um número mínimo de axiomas. Dependendo dos conectivos tomados como primitivos, é até possível encontrar sistemas de axiomas que consistem em um único axioma.

Uma regra de inferência é uma afirmação condicional que dá uma condição suficiente para que uma **sentença** em uma **derivação** seja justificada. O modus ponens é uma regra muito comum desse tipo: diz que se φ e $\varphi \rightarrow \psi$ já estão justificados, então ψ está justificado. Isso significa que uma linha em uma **derivação** que contém a **sentença** ψ está justificada, desde que tanto φ quanto $\varphi \rightarrow \psi$ (para alguma **sentença** φ) apareçam na **derivação** antes de ψ .

A relação $\vdash$ baseada em **derivações** axiomáticas é definida da seguinte forma: $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, há uma **derivação** com a **sentença** φ como sua última fórmula (e Γ é tomado como o conjunto de **sentenças** nessa **derivação** que são justificadas por (2) acima). φ é um teorema se φ tem uma **derivação** em que Γ é vazio, isto é, toda **sentença** na **derivação** é justificada por (1) ou (3). Por exemplo, aqui está uma **derivação** que mostra que $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\psi \vee \varphi))$:

1. $\psi \rightarrow (\psi \vee \varphi)$
2. $(\psi \rightarrow (\psi \vee \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\psi \vee \varphi)))$
3. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\psi \vee \varphi))$

A **sentença** na linha 1 tem a forma do axioma $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ (com os papéis de φ e ψ invertidos). A **sentença** na linha 2 tem a forma do axioma $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$. Assim, ambas as linhas estão justificadas. A linha 3 é justificada por modus ponens: se a abreviarmos como θ , então a linha 2 tem a forma $\chi \rightarrow \theta$, onde χ é $\psi \rightarrow (\psi \vee \varphi)$, isto é, a linha 1.

Um conjunto Γ é inconsistente se $\Gamma \vdash \perp$. Um sistema de axiomas completo também provará que $\perp \rightarrow \varphi$ para qualquer φ , e assim, se Γ é inconsistente, então $\Gamma \vdash \varphi$ para qualquer φ .

Sistemas de **derivações** axiomáticas para lógica foram dados pela primeira vez por Gottlob Frege em sua *Begriffsschrift* de 1879, que por essa razão é frequentemente considerada a primeira obra da lógica moderna. Foram aperfeiçoados em *Principia Mathematica* de Alfred North Whitehead e Bertrand Russell e por David Hilbert e seus alunos na década de 1920. São assim frequentemente chamados de “sistemas de Frege” ou “sistemas de Hilbert”. São muito versáteis no sentido de que é frequentemente fácil encontrar um sistema axiomático para uma lógica. Porque as **derivações** têm uma estrutura muito simples e apenas uma ou duas regras de inferência, também é relativamente fácil provar coisas *sobre* eles. No entanto, são muito difíceis de usar na prática, isto é, é difícil encontrar e escrever provas.

Capítulo 3

O Cálculo de Sequentes

Este capítulo apresenta o cálculo de sequentes padrão LK de Gentzen para a lógica clássica de primeira ordem. Ele poderia ter mais exemplos e exercícios. Para incluir ou excluir material relevante ao cálculo de sequentes como sistema de prova, use a tag “prfLK”.

3.1 Regras e Derivações

Para o que segue, sejam $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ representando sequências finitas de sentenças pl:seq:rul: sec.

Definição 3.1 (Sequente). Um *sequente* é uma expressão da forma

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

em que Γ e Δ são sequências finitas (possivelmente vazias) de sentenças da linguagem $\mathcal{L}$. Γ é chamado de *antecedente*, enquanto Δ é o *sucedente*.

explanation A ideia intuitiva por trás de um sequente é: se todas as sentenças no antecedente valem, então ao menos uma das sentenças no sucedente vale. Isto é, se $\Gamma = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_m \rangle$ e $\Delta = \langle \psi_1, \dots, \psi_n \rangle$, então $\Gamma \Rightarrow \Delta$ vale se, e somente se,

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m) \rightarrow (\psi_1 \vee \dots \vee \psi_n)$$

vale. Há dois casos especiais: quando Γ é vazio e quando Δ é vazio. Quando Γ é vazio, isto é, $m = 0$, $\Rightarrow \Delta$ vale se, e somente se, $\psi_1 \vee \dots \vee \psi_n$ vale. Quando Δ é vazio, isto é, $n = 0$, $\Gamma \Rightarrow$ vale se, e somente se, $\neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m)$ vale. Dizemos que um sequente é válido se, e somente se, a sentença correspondente é válida.

Se Γ é uma sequência de sentenças, escrevemos Γ, φ para o resultado de acrescentar φ à extremidade direita de Γ (e φ, Γ para o resultado de acrescentar φ à extremidade esquerda de Γ). Se Δ também é uma sequência de sentenças, então Γ, Δ é a concatenação das duas sequências.

Definição 3.2 (Sequente Inicial). Um *sequente inicial* é um sequente de uma das seguintes formas:

1. $\varphi \Rightarrow \varphi$
2. $\Rightarrow \top$
3. $\perp \Rightarrow$

para qualquer *sentença* φ na linguagem.

Derivações no cálculo de sequentes são certas árvores de sequentes, em que os sequentes no topo são sequentes iniciais e, se um sequente está abaixo de um ou dois outros sequentes, ele deve seguir corretamente por uma regra de inferência. As regras para **LK** dividem-se em dois tipos principais: regras *lógicas* e regras *estruturais*. As regras lógicas recebem o nome do **operador principal** da *sentença* que contém φ e/ou ψ no sequente inferior. Cada uma vem em duas versões, uma para inferir um sequente com a *sentença* que contém o **operador lógico** à esquerda, e uma com a *sentença* à direita.

3.2 Regras Proposicionais

pl:seq:prl:
sec **Regras para $\neg$**

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \neg L \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg \varphi} \neg R$$

Regras para $\wedge$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge L \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \wedge R$$

$$\frac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge L$$

Regras para $\vee$

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \vee L \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \vee R$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \vee R$$

Regras para $\rightarrow$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda} \rightarrow L \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R$$

3.3 Regras Estruturais

Precisamos também de algumas regras que nos permitam reorganizar **sentenças** nos lados esquerdo e direito de um sequente. Como as regras lógicas exigem que as **sentenças** na premissa sobre as quais a regra atua estejam ou na extremidade esquerda ou na extremidade direita, precisamos de uma regra de “troca” que nos permita mover **sentenças** para a posição correta. Às vezes também é importante poder combinar duas **sentenças** idênticas em uma só, e acrescentar **a sentença** em qualquer um dos lados. pl:seq:srl:sec

Enfraquecimento

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} WL \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} WR$$

Contração

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} CL \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} CR$$

Troca

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \Rightarrow \Delta} XL \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Lambda}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Lambda} XR$$

Uma série de inferências de enfraquecimento, contração e troca será frequentemente indicada por linhas de inferência duplas.

A regra a seguir, chamada de “corte”, não é estritamente necessária, mas torna muito mais fácil reutilizar e combinar **derivações**.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda} \text{Cut}$$

3.4 Derivações

pl:seq:der: Já dissemos como é um sequente inicial e demos as regras de inferência. De- explanation
sec rivações no cálculo de sequentes são geradas indutivamente a partir disso: cada deriv
ação ou é um sequente inicial por si só, ou consiste em uma ou duas de-
rivações seguidas de uma inferência.

Definição 3.3 (LK-derivação**).** Uma **LK-deriv**ação de um sequente S é uma árvore finita de sequentes que satisfaz as seguintes condições:

1. Os sequentes no topo da árvore são sequentes iniciais.
2. O sequente na base da árvore é S .
3. Todo sequente na árvore exceto S é uma premissa de uma aplicação correta de uma regra de inferência cuja conclusão está diretamente abaixo daquele sequente na árvore.

Dizemos então que S é o *sequente final* da derivação e que S é *derivável em LK* (ou **LK-derivável**).

Exemplo 3.4. Todo sequente inicial, por exemplo, $\chi \Rightarrow \chi$, é a derivação. Podemos obter uma nova derivação a partir disso aplicando, digamos, a regra WL,

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ WL}$$

A regra, contudo, deve ser geral: podemos substituir o φ na regra por qualquer sentença, por exemplo, também por θ . Se a premissa corresponde ao nosso sequente inicial $\chi \Rightarrow \chi$, isso significa que tanto Γ quanto Δ são apenas χ , e a conclusão seria então $\theta, \chi \Rightarrow \chi$. Assim, o seguinte é a derivação:

$$\frac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi} \text{ WL}$$

Podemos agora aplicar outra regra, digamos XL, que nos permite trocar duas sentenças à esquerda. Assim, o seguinte também é uma derivação correta:

$$\frac{\frac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi} \text{ WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi} \text{ XL}$$

Nesta aplicação da regra, que foi dada como

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \Rightarrow \Delta} \text{ XL}$$

tanto Γ quanto Π eram vazios, Δ é χ , e os papéis de φ e ψ são desempenhados por θ e χ , respectivamente. De modo muito semelhante, vemos também que

$$\frac{\theta \Rightarrow \theta}{\chi, \theta \Rightarrow \theta} \text{WL}$$

é a **derivação**. Agora podemos pegar essas duas **derivações** e combiná-las usando $\wedge R$. Aquela regra era

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \wedge R$$

No nosso caso, as premissas devem corresponder aos últimos sequentes das **derivações** que terminam nas premissas. Isso significa que Γ é χ, θ , Δ é vazio, φ é χ e ψ é θ . Assim, a conclusão, se a inferência for correta, é $\chi, \theta \Rightarrow \chi \wedge \theta$.

$$\frac{\frac{\frac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi} \text{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi} \text{XL} \quad \frac{\theta \Rightarrow \theta}{\chi, \theta \Rightarrow \theta} \text{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi \wedge \theta} \wedge R$$

É claro que também podemos inverter as premissas; então φ seria θ e ψ seria χ .

$$\frac{\frac{\theta \Rightarrow \theta}{\chi, \theta \Rightarrow \theta} \text{WL} \quad \frac{\frac{\chi \Rightarrow \chi}{\theta, \chi \Rightarrow \chi} \text{WL}}{\chi, \theta \Rightarrow \chi} \text{XL}}{\chi, \theta \Rightarrow \theta \wedge \chi} \wedge R$$

3.5 Exemplos de Derivações

Exemplo 3.5. Dê uma **LK-derivação** para o sequente $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$.

pl:seq:pro:
sec

Começamos escrevendo o sequente final desejado na base da **derivação**.

$$\overline{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}$$

Em seguida, precisamos descobrir que tipo de inferência poderia ter um sequente inferior dessa forma. Poderia ser uma regra estrutural, mas é uma boa ideia começar procurando uma regra lógica. O único conectivo lógico que ocorre no sequente inferior é $\wedge$, então procuramos uma regra de $\wedge$ e, como o símbolo $\wedge$ ocorre no antecedente, estamos diante da regra $\wedge L$.

$$\overline{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \wedge L$$

Há duas opções para o que poderia ter sido o sequente superior da inferência $\wedge L$: poderíamos ter um sequente superior $\varphi \Rightarrow \varphi$ ou $\psi \Rightarrow \varphi$. Claramente, $\varphi \Rightarrow \varphi$ é um sequente inicial (o que é bom), enquanto $\psi \Rightarrow \varphi$ não é derivável em geral. Preenchemos o sequente superior:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \wedge L$$

Agora temos uma **LK-derivação** correta do sequente $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$.

Exemplo 3.6. Dê uma **LK-derivação** para o sequente $\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$.

Comece escrevendo o sequente final desejado na base da **derivação**.

$$\frac{}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi}$$

Para encontrar uma regra lógica que pudesse nos dar esse sequente final, olhamos para os conectivos lógicos no sequente final: $\neg$, $\vee$ e $\rightarrow$. No momento, só nos importam $\vee$ e $\rightarrow$, porque são **operadores principais** de **sentenças** no sequente final, enquanto $\neg$ está dentro do escopo de outro conectivo, de modo que cuidaremos dele depois. Nossas opções de regras lógicas para a inferência final são, portanto, a regra $\vee$ L e a regra $\rightarrow$ R. Poderíamos escolher qualquer uma das regras, na verdade, mas vamos escolher a regra $\rightarrow$ R (quando não fosse por outro motivo, porque ela nos permite adiar a divisão em dois ramos). De acordo com a forma das inferências $\rightarrow$ R que podem produzir o sequente inferior, isto deve ser assim:

$$\frac{\frac{}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi}}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R$$

Se movermos $\neg\varphi \vee \psi$ para a parte externa do antecedente, podemos aplicar a regra $\vee$ L. De acordo com o esquema, isto deve se dividir em dois sequentes superiores como segue:

$$\frac{\frac{\frac{}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi}}{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi} \vee L \quad \frac{\frac{}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi}}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi} \text{XR}}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R$$

Lembre-se de que estamos tentando subir até sequentes iniciais; parece que estamos bem perto! O ramo direito está a apenas um enfraquecimento e uma troca de um sequente inicial, e então estará pronto:

$$\frac{\frac{\frac{}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi}}{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi} \vee L \quad \frac{\frac{\frac{}{\psi \Rightarrow \psi}}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi} \text{WL}}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi} \text{XL}}{\frac{\frac{}{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi}}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi} \text{XR}}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R$$

Agora, olhando para o ramo esquerdo, o único conectivo lógico em qualquer **sentença** é o símbolo $\neg$ nas **sentenças** do antecedente, então estamos diante de uma instância da regra $\neg$ L.

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow \psi} \neg L \quad \frac{\frac{\frac{}{\psi \Rightarrow \psi}}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi} \text{WL}}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi} \text{XL}}{\frac{\frac{}{\neg\varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi}}{\varphi, \neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \psi} \text{XR}}{\neg\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R$$

De modo semelhante a como finalizamos o ramo direito, estamos a apenas um enfraquecimento e uma troca de finalizar também este ramo esquerdo.

$$\begin{array}{c}
\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi} \text{WR} \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi} \text{WL} \\
\frac{\varphi \Rightarrow \varphi, \psi}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi} \text{XR} \quad \frac{\varphi, \psi \Rightarrow \psi}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi} \text{XL} \\
\frac{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}{\neg \varphi, \varphi \Rightarrow \psi} \neg\text{L} \quad \frac{\psi, \varphi \Rightarrow \psi}{\neg \varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi} \vee\text{L} \\
\frac{\neg \varphi \vee \psi, \varphi \Rightarrow \psi}{\varphi, \neg \varphi \vee \psi \Rightarrow \psi} \text{XR} \\
\frac{\varphi, \neg \varphi \vee \psi \Rightarrow \psi}{\neg \varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{R}
\end{array}$$

Exemplo 3.7. Dê uma **LK-derivação** do sequente $\neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$

Usando as técnicas acima, começamos escrevendo o sequente final desejado na base.

$$\frac{}{\neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}$$

Os conectivos principais disponíveis das **sentenças** no sequente final são o símbolo $\vee$ e o símbolo $\neg$. Funcionaria aplicar aqui ou a regra $\vee\text{L}$ ou a regra $\neg\text{R}$, mas começamos com a regra $\neg\text{R}$ porque ela evita, por ora, a divisão em dois ramos:

$$\frac{\frac{}{\varphi \wedge \psi, \neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow} \neg\text{R}}{\neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}$$

Agora temos a escolha de olhar para a regra $\wedge\text{L}$ ou a regra $\vee\text{L}$. Vejamos o que acontece quando aplicamos a regra $\wedge\text{L}$: temos a escolha de começar com o sequente $\varphi, \neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow$ ou com o sequente $\psi, \neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow$. Como a **derivação** é simétrica em relação a φ e ψ , vamos com o primeiro:

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi, \neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow} \wedge\text{L}}{\varphi \wedge \psi, \neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow} \neg\text{R}}{\neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)}$$

Continuando a preencher a **derivação**, vemos que esbarramos em um problema:

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{}{\varphi \Rightarrow \varphi} \neg\text{L}}{\neg \varphi, \varphi \Rightarrow} \neg\text{L} \quad \frac{\frac{\frac{}{\varphi \Rightarrow \psi} \neg\text{L}}{\neg \psi, \varphi \Rightarrow} \neg\text{L}}{\neg \varphi \vee \neg \psi, \varphi \Rightarrow} \vee\text{L} \\
\frac{\neg \varphi \vee \neg \psi, \varphi \Rightarrow}{\varphi, \neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow} \text{XL} \\
\frac{\varphi, \neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow}{\varphi \wedge \psi, \neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow} \wedge\text{L} \\
\frac{\varphi \wedge \psi, \neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow}{\neg \varphi \vee \neg \psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)} \neg\text{R}
\end{array}$$

O topo do ramo direito não pode ser reduzido mais, e ele não pode ser levado, por meio de inferências estruturais, a um sequente inicial, então este não é o caminho certo a tomar. Assim, claramente, foi um erro aplicar a regra $\wedge\text{L}$ acima. Voltando ao que tínhamos antes e executando a regra $\vee\text{L}$ em vez disso, obtemos

$$\begin{array}{c}
\frac{\overline{\neg\varphi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \quad \overline{\neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}}{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \vee L \\
\frac{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow} \text{XL} \\
\frac{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)} \neg R
\end{array}$$

Completando cada ramo como fizemos antes, obtemos

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \wedge L \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi} \wedge L}{\neg\varphi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \neg L \quad \frac{\neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow} \neg L \\
\frac{\neg\varphi \vee \neg\psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow}{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow} \vee L \\
\frac{\varphi \wedge \psi, \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow}{\neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)} \text{XL} \quad \neg R
\end{array}$$

(Poderíamos ter executado as regras de $\wedge$ mais abaixo do que as regras de $\neg$ nesses passos e ainda assim obtido uma **derivação** correta).

Exemplo 3.8. Até agora não usamos a regra de contração, mas às vezes ela é necessária. Eis um exemplo em que isso acontece. Suponha que queiramos provar $\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$. Aplicar $\vee R$ de trás para frente nos daria uma destas duas **derivações**:

$$\begin{array}{c}
\frac{\overline{\Rightarrow \varphi}}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi} \vee R \quad \frac{\overline{\varphi \Rightarrow}}{\Rightarrow \neg\varphi} \neg R \\
\frac{\Rightarrow \neg\varphi}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi} \vee R
\end{array}$$

Nenhuma destas, é claro, termina em um sequente inicial. O truque é perceber que a regra de contração nos permite combinar duas cópias de **a sentença** em uma só—e quando estamos buscando uma prova, isto é, indo de baixo para cima, podemos manter uma cópia de $\varphi \vee \neg\varphi$ na premissa, por exemplo,

$$\begin{array}{c}
\frac{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi} \vee R \\
\frac{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi} \text{CR}
\end{array}$$

Agora podemos aplicar $\vee R$ uma segunda vez, e também obter $\neg\varphi$, o que leva a uma **derivação** completa.

$$\begin{array}{c}
\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi} \neg R \\
\frac{\Rightarrow \varphi, \neg\varphi}{\Rightarrow \varphi, \varphi \vee \neg\varphi} \vee R \\
\frac{\Rightarrow \varphi, \varphi \vee \neg\varphi}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi} \text{XR} \\
\frac{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi} \vee R \\
\frac{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi, \varphi \vee \neg\varphi}{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi} \text{CR}
\end{array}$$

Problema 3.1. Dê **derivações** dos seguintes sequentes:

1. $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
2. $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \vee \chi$.

$$3. \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \Rightarrow \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi).$$

$$4. \varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi.$$

Problema 3.2. Dê **derivações** dos seguintes sequentes:

$$1. (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi \Rightarrow \varphi \rightarrow \chi.$$

$$2. (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi.$$

$$3. \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\varphi).$$

$$4. \psi \rightarrow \varphi \Rightarrow \neg\varphi \rightarrow \neg\psi.$$

$$5. \Rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi.$$

$$6. \Rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\psi.$$

$$7. \varphi \rightarrow \chi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\chi).$$

$$8. \varphi \wedge \neg\chi \Rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \chi).$$

$$9. \varphi \vee \psi, \neg\psi \Rightarrow \varphi.$$

$$10. \neg\varphi \vee \neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi).$$

$$11. \Rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi).$$

$$12. \Rightarrow \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

Problema 3.3. Dê **derivações** dos seguintes sequentes:

$$1. \neg(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi.$$

$$2. \neg(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi.$$

$$3. \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \neg\varphi \vee \psi.$$

$$4. \Rightarrow \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi.$$

$$5. \varphi \rightarrow \psi, \neg\varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \psi.$$

$$6. (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi \Rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi).$$

$$7. (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi.$$

$$8. \Rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \chi).$$

(Todos esses requerem a regra CR.)

Esta seção reúne as definições da relação de demonstrabilidade e de consistência para a dedução natural.

3.6 Noções da Teoria da Prova

Assim como definimos uma série de noções semânticas importantes (validade, consequência, satisfatibilidade), definimos agora as *noções da teoria da prova* correspondentes. Elas não são definidas por apelo à satisfação de **sentenças** em **estruturas**, mas por apelo à **derivabilidade** ou à **não derivabilidade** de certos sequentes. Foi uma descoberta importante que essas noções coincidem. Que elas coincidem é o conteúdo dos teoremas da *correção* e da *completude*.

Definição 3.9 (Teoremas). A **sentença** φ é um *teorema* se há a **derivação** em **LK** do sequente $\Rightarrow \varphi$. Escrevemos $\vdash \varphi$ se φ é um teorema e $\nvdash \varphi$ se não é.

Definição 3.10 (Derivabilidade). A **sentença** φ é **derivável** de um conjunto de **sentenças** Γ , $\Gamma \vdash \varphi$, se, e somente se, há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ e uma sequência Γ'_0 das **sentenças** em Γ_0 tal que **LK** **deriva** $\Gamma'_0 \Rightarrow \varphi$. Se φ não é **derivável** de Γ , escrevemos $\Gamma \nvdash \varphi$.

Por causa das regras de contração, enfraquecimento e troca, a ordem e o número de **sentenças** em Γ'_0 não importam: se um sequente $\Gamma'_0 \Rightarrow \varphi$ é **derivável**, então também o é $\Gamma''_0 \Rightarrow \varphi$ para qualquer Γ''_0 que contenha as mesmas **sentenças** que Γ'_0 . Por exemplo, se $\Gamma_0 = \{\psi, \chi\}$, então tanto $\Gamma'_0 = \langle \psi, \psi, \chi \rangle$ quanto $\Gamma''_0 = \langle \chi, \chi, \psi \rangle$ são sequências que contêm apenas as **sentenças** em Γ_0 . Se um sequente contendo uma delas é **derivável**, o outro também é, por exemplo:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\psi, \psi, \chi \Rightarrow \varphi}{\psi, \chi \Rightarrow \varphi} \text{CL} \\ \frac{\psi, \chi \Rightarrow \varphi}{\chi, \psi \Rightarrow \varphi} \text{XL} \\ \frac{\chi, \psi \Rightarrow \varphi}{\chi, \chi, \psi \Rightarrow \varphi} \text{WL} \end{array}$$

De agora em diante, diremos que, se Γ_0 é um conjunto finito de **sentenças**, então $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ é qualquer sequente em que o antecedente é uma sequência de **sentenças** em Γ_0 , e incluiremos tacitamente contrações, trocas e enfraquecimentos se necessário.

Definição 3.11 (Consistência). Um conjunto de **sentenças** Γ é *inconsistente* se, e somente se, há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que **LK** **deriva** $\Gamma_0 \Rightarrow$. Se Γ não é inconsistente, isto é, se para todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito, **LK** não **deriva** $\Gamma_0 \Rightarrow$, dizemos que é *consistente*.

Proposição 3.12 (Reflexividade). Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Prova. O sequente inicial $\varphi \Rightarrow \varphi$ é **derivável**, e $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$. □

Proposição 3.13 (Monotonicidade). Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Delta \vdash \varphi$.

Prova. Suponha $\Gamma \vdash \varphi$, isto é, há um $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ é derivável. Como $\Gamma \subseteq \Delta$, então Γ_0 também é um subconjunto finito de Δ . A derivação de $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ mostra, assim, também que $\Delta \vdash \varphi$. $\square$

Proposição 3.14 (Transitividade). *Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.* pl:seq:ptn:
prop:transitivity

Prova. Se $\Gamma \vdash \varphi$, há um $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito e a derivação π_0 de $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$. Se $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, então, para algum subconjunto finito $\Delta_0 \subseteq \Delta$, há a derivação π_1 de $\varphi, \Delta_0 \Rightarrow \psi$. Considere a seguinte derivação:

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \pi_0 \\ \vdots \\ \Gamma_0 \Rightarrow \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \pi_1 \\ \vdots \\ \varphi, \Delta_0 \Rightarrow \psi \end{array}}{\Gamma_0, \Delta_0 \Rightarrow \psi} \text{Cut}$$

Como $\Gamma_0 \cup \Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \Delta$, isso mostra $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$. $\square$

Note que isso significa, em particular, que se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\varphi \vdash \psi$, então $\Gamma \vdash \psi$. Segue-se também que se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi_i$ para cada i , então $\Gamma \vdash \psi$.

Proposição 3.15. *Γ é inconsistente se, e somente se, $\Gamma \vdash \varphi$ para toda sentença φ .* pl:seq:ptn:
prop:incons

Prova. Exercício. $\square$

Problema 3.4. Prove ??

Proposição 3.16 (Compacidade).

pl:seq:ptn:
prop:proves-compact

1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \vdash \varphi$.
2. Se todo subconjunto finito de Γ é consistente, então Γ é consistente.

Prova. 1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que o sequente $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ tem a derivação. Consequentemente, $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

2. Se Γ é inconsistente, há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que **LK** deriva $\Gamma_0 \Rightarrow$. Mas então Γ_0 é um subconjunto finito de Γ que é inconsistente. $\square$

3.7 Derivabilidade e Consistência

pl:seq:prv: Estabeleceremos agora uma série de propriedades da relação de **derivabilidade**.
sec
Elas são interessantes por si mesmas, mas cada uma terá um papel na prova do teorema da completude.

pt:seq:prv:prop:provability-contr **Proposição 3.17.** *Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente, então Γ é inconsistente.*

Prova. Há Γ_0 e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ finitos tais que **LK** deriva $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ e $\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow$. Seja π_0 a **LK-derivação** de $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$ e π_1 a **LK-derivação** de $\Gamma_1, \varphi \Rightarrow$. Podemos então derivar

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \pi_0 \\ \vdots \end{array} \quad \Gamma_0 \Rightarrow \varphi \qquad \varphi, \Gamma_1 \Rightarrow \begin{array}{c} \vdots \\ \pi_1 \\ \vdots \end{array}}{\Gamma_0, \Gamma_1 \Rightarrow} \text{Cut}$$

Como $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$; portanto, Γ é inconsistente. $\square$

pl:seq:prv: **Proposição 3.18.** $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente.
prop:prov-incons

Prova. Primeiro, suponha $\Gamma \vdash \varphi$, isto é, há a derivação π_0 de $\Gamma \Rightarrow \varphi$. Acrescentando uma regra $\neg\text{L}$, obtemos a derivação de $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow$, isto é, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente.

Se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente, há a **derivação** π_1 de $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow$. O seguinte é a **derivação** de $\Gamma \Rightarrow \varphi$:

$$\frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\Rightarrow \varphi, \neg \varphi} \neg R \quad \neg \varphi, \Gamma \Rightarrow \vdots \pi_1}{\Gamma \Rightarrow \varphi} \text{Cut} \quad \square$$

Problema 3.5. Prove que $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se, e somente se, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente.

pl:seq:prv: **Proposição 3.19.** *Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\neg\varphi \in \Gamma$, então Γ é inconsistente.*
prop:explicit-inc

Prova. Suponha $\Gamma \vdash \varphi$ e $\neg\varphi \in \Gamma$. Então há a **derivação** π de um sequente $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$. O sequente $\neg\varphi, \Gamma_0 \Rightarrow$ também é **derivável**:

$$\frac{\Gamma_0 \Rightarrow \varphi}{\Gamma_0, \neg\varphi \Rightarrow} \text{Cut} \quad \frac{\frac{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow} \text{XL} \quad \frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow} \neg\text{L}}{\vdots \pi} \text{Cut}$$

Como $\neg\varphi \in \Gamma$ e $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, isso mostra que Γ é inconsistente. $\square$

Proposição 3.20. Se $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ são ambos inconsistentes, então Γ é inconsistente. *pl:seq:prv:
prop:provability-exhaustive*

Prova. Há conjuntos finitos $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ e **LK-derivações** π_0 e π_1 de $\varphi, \Gamma_0 \Rightarrow$ e $\neg\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow$, respectivamente. Podemos então derivar

$$\frac{\frac{\frac{\vdots \pi_0}{\varphi, \Gamma_0 \Rightarrow} \neg R}{\Gamma_0 \Rightarrow \neg\varphi} \quad \frac{\vdots \pi_1}{\neg\varphi, \Gamma_1 \Rightarrow} \text{Cut}}{\Gamma_0, \Gamma_1 \Rightarrow}$$

Como $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ e $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$. Portanto, Γ é inconsistente. □

3.8 Derivabilidade e os Conectivos Proposicionais

explanation Estabelecemos que a relação de **derivabilidade** $\vdash$ do cálculo de seqüentes é forte o suficiente para estabelecer alguns fatos básicos envolvendo os conectivos proposicionais, tais como $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ e $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$ (modus ponens). Esses fatos são necessários para a prova do teorema da completude. *pl:seq:ppr:
sec*

Proposição 3.21.

1. Tanto $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ quanto $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$.
2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

*pl:seq:ppr:
prop:provability-land
pl:seq:ppr:
prop:provability-land-left
pl:seq:ppr:
prop:provability-land-right*

Prova. 1. Ambos os seqüentes $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ e $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$ são **deriváveis**:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \wedge L \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi} \wedge L$$

2. Eis a **derivação** do seqüente $\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi \quad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi} \wedge R$$

□

Proposição 3.22.

*pl:seq:ppr:
prop:provability-lor*

1. $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ é inconsistente.
2. Tanto $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ quanto $\psi \vdash \varphi \vee \psi$.

Prova. 1. Damos a **derivação** do seqüente $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow$:

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow} \neg L}{\varphi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow} \quad \frac{\frac{\frac{\psi \Rightarrow \psi}{\neg\psi, \psi \Rightarrow} \neg L}{\psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow} \neg L}{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi \Rightarrow} \vee L$$

(Lembre-se de que linhas de inferência duplas indicam várias inferências de enfraquecimento, contração e troca.)

2. Ambos os sequentes $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ e $\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ têm **derivações**:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi} \vee R \quad \frac{\psi \Rightarrow \psi}{\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi} \vee R \quad \square$$

Proposição 3.23.

pl:seq:ppr:
prop:provability-lif
pl:seq:ppr:
prop:provability-lif-left
pl:seq:ppr:
prop:provability-lif-right

1. $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$.
2. Tanto $\neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ quanto $\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Prova. 1. O sequente $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi$ é **derivável**:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi \quad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi} \rightarrow L$$

2. Ambos os sequentes $\neg\varphi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$ e $\psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$ são **deriváveis**:

$$\frac{\frac{\frac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\neg\varphi, \varphi \Rightarrow} \neg L}{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow} XL \quad \frac{\varphi, \neg\varphi \Rightarrow \psi}{\neg\varphi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R \quad \frac{\frac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \psi} WL}{\psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R \quad \square$$

3.9 Correção

pl:seq:sou:
sec Um sistema de **derivação**, tal como o cálculo de sequentes, é *correto* se não *explanation* pode derivar coisas que de fato não valem. A correção é, assim, uma espécie de propriedade de segurança garantida para sistemas de **derivação**. Dependendo de qual propriedade da teoria da prova está em questão, gostaríamos de saber, por exemplo, que

1. todo φ **derivável** é uma tautologia;
2. se a **sentença** é **derivável** de algumas outras, ela também é consequência delas;
3. se um conjunto de **sentenças** é inconsistente, ele é insatisfável.

Essas são propriedades importantes de um sistema de **derivação**. Se alguma delas não vale, o sistema de **derivação** é deficiente—ele **deriva** demais. Consequentemente, estabelecer a correção de um sistema de **derivação** é da máxima importância.

Como todas essas propriedades da teoria da prova são definidas via **derivabilidade** no cálculo de seqüentes de certos seqüentes, provar (1)–(3) acima requer provar algo sobre as propriedades semânticas dos seqüentes **deriváveis**. Primeiro definiremos o que significa um seqüente ser *válido*, e então mostraremos que todo seqüente **derivável** é válido. (1)–(3) seguem-se então como corolários desse resultado.

Definição 3.24. A **valoração** $\mathbf{v}$ *satisfaz* um seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ se, e somente se, ou $\mathbf{v} \not\models \varphi$ para algum $\varphi \in \Gamma$ ou $\mathbf{v} \models \varphi$ para algum $\varphi \in \Delta$.

Um seqüente é *válido* se, e somente se, toda **valoração** $\mathbf{v}$ o satisfaz.

Teorema 3.25 (Correção). Se LK **deriva** $\Theta \Rightarrow \Xi$, então $\Theta \Rightarrow \Xi$ é válido.

*pl:seq:sou:
thm:sequent-soundness*

Prova. Seja π a **derivação** de $\Theta \Rightarrow \Xi$. Procedemos por indução sobre o número de inferências n em π .

Se o número de inferências é 0, então π consiste apenas em um seqüente inicial. Todo seqüente inicial $\varphi \Rightarrow \varphi$ é obviamente válido, pois para toda $\mathbf{v}$, ou $\mathbf{v} \not\models \varphi$ ou $\mathbf{v} \models \varphi$.

Se o número de inferências é maior que 0, distinguimos casos de acordo com o tipo da inferência mais inferior. Pela hipótese de indução, podemos supor que as premissas dessa inferência são válidas, já que o número de inferências na **derivação** de qualquer premissa é menor que n .

Primeiro, consideramos as inferências possíveis com apenas uma premissa.

1. A última inferência é um enfraquecimento. Então $\Theta \Rightarrow \Xi$ é $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ (se a última inferência é WL) ou $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ (se é WR), e a **derivação** termina em uma de

$$\frac{\vdots}{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{ WL}} \quad \frac{\vdots}{\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \text{ WR}}$$

Pela hipótese de indução, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é válido, isto é, para toda **valoração** $\mathbf{v}$, ou há algum $\chi \in \Gamma$ tal que $\mathbf{v} \not\models \chi$ ou há algum $\chi \in \Delta$ tal que $\mathbf{v} \models \chi$.

Se $\mathbf{v} \not\models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, então $\chi \in \Theta$ também, já que $\Theta = \varphi, \Gamma$, e assim $\mathbf{v} \not\models \chi$ para algum $\chi \in \Theta$. Analogamente, se $\mathbf{v} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$, como $\chi \in \Xi$, $\mathbf{v} \models \chi$ para algum $\chi \in \Xi$. Consequentemente, $\Theta \Rightarrow \Xi$ é válido.

2. A última inferência é $\neg$ L: Então a premissa da última inferência é $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ e a conclusão é $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, isto é, a **derivação** termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \end{array}}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \neg L$$

e $\Theta = \neg\varphi, \Gamma$ enquanto $\Xi = \Delta$.

A hipótese de indução nos diz que $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido, isto é, para toda $\mathbf{v}$, ou (a) para algum $\chi \in \Gamma$, $\mathbf{v} \not\models \chi$, ou (b) para algum $\chi \in \Delta$, $\mathbf{v} \models \chi$, ou (c) $\mathbf{v} \models \varphi$. Queremos mostrar que $\Theta \Rightarrow \Xi$ também é válido. Seja $\mathbf{v}$ a **avaliação**. Se (a) vale, então há $\chi \in \Gamma$ tal que $\mathbf{v} \not\models \chi$, mas $\chi \in \Theta$ também. Se (b) vale, há $\chi \in \Delta$ tal que $\mathbf{v} \models \chi$, mas $\chi \in \Xi$ também. Por fim, se $\mathbf{v} \models \varphi$, então $\mathbf{v} \not\models \neg\varphi$. Como $\neg\varphi \in \Theta$, há $\chi \in \Theta$ tal que $\mathbf{v} \not\models \chi$. Consequentemente, $\Theta \Rightarrow \Xi$ é válido.

3. A última inferência é $\neg R$: Exercício.
4. A última inferência é $\wedge L$: Há duas variantes: $\varphi \wedge \psi$ pode ser inferido à esquerda a partir de φ ou de ψ no lado esquerdo da premissa. No primeiro caso, π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \end{array}}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge L$$

e $\Theta = \varphi \wedge \psi, \Gamma$ enquanto $\Xi = \Delta$. Considere a **avaliação** $\mathbf{v}$. Como, pela hipótese de indução, $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ é válido, (a) $\mathbf{v} \not\models \varphi$, (b) $\mathbf{v} \not\models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (c) $\mathbf{v} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$. No caso (a), $\mathbf{v} \not\models \varphi \wedge \psi$, então há $\chi \in \Theta$ (a saber, $\varphi \wedge \psi$) tal que $\mathbf{v} \not\models \chi$. No caso (b), há $\chi \in \Gamma$ tal que $\mathbf{v} \not\models \chi$, e $\chi \in \Theta$ também. No caso (c), há $\chi \in \Delta$ tal que $\mathbf{v} \models \chi$, e $\chi \in \Xi$ também, já que $\Xi = \Delta$. Assim, em cada caso, $\mathbf{v}$ satisfaz $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. Como $\mathbf{v}$ era arbitrário, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é válido. O caso em que $\varphi \wedge \psi$ é inferido a partir de ψ é tratado da mesma forma, mudando φ para ψ .

5. A última inferência é $\vee R$: Há duas variantes: $\varphi \vee \psi$ pode ser inferido à direita a partir de φ ou de ψ no lado direito da premissa. No primeiro caso, π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \vee R$$

Agora $\Theta = \Gamma$ e $\Xi = \Delta, \varphi \vee \psi$. Considere a **avaliação** $\mathbf{v}$. Como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido, (a) $\mathbf{v} \models \varphi$, (b) $\mathbf{v} \not\models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (c) $\mathbf{v} \models \chi$ para algum

$\chi \in \Delta$. No caso (a), $\mathbf{v} \models \varphi \vee \psi$. No caso (b), há $\chi \in \Gamma$ tal que $\mathbf{v} \not\models \chi$. No caso (c), há $\chi \in \Delta$ tal que $\mathbf{v} \models \chi$. Assim, em cada caso, $\mathbf{v}$ satisfaz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$, isto é, $\Theta \Rightarrow \Xi$. Como $\mathbf{v}$ era arbitrário, $\Theta \Rightarrow \Xi$ é válido. O caso em que $\varphi \vee \psi$ é inferido a partir de ψ é tratado da mesma forma, mudando φ para ψ .

6. A última inferência é $\rightarrow R$: Então π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R$$

Novamente, a hipótese de indução diz que a premissa é válida; queremos mostrar que a conclusão também é válida. Seja $\mathbf{v}$ arbitrário. Como $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ é válido, ao menos um dos seguintes casos ocorre: (a) $\mathbf{v} \not\models \varphi$, (b) $\mathbf{v} \models \psi$, (c) $\mathbf{v} \not\models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (d) $\mathbf{v} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$. Nos casos (a) e (b), $\mathbf{v} \models \varphi \rightarrow \psi$ e assim há um $\chi \in \Delta, \varphi \rightarrow \psi$ tal que $\mathbf{v} \models \chi$. No caso (c), para algum $\chi \in \Gamma$, $\mathbf{v} \not\models \chi$. No caso (d), para algum $\chi \in \Delta$, $\mathbf{v} \models \chi$. Em cada caso, $\mathbf{v}$ satisfaz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$. Como $\mathbf{v}$ era arbitrário, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$ é válido.

Agora consideremos as inferências possíveis com duas premissas.

1. A última inferência é um corte: então π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda \end{array}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda} \text{Cut}$$

Seja $\mathbf{v}$ a **valoração**. Pela hipótese de indução, as premissas são válidas, então $\mathbf{v}$ satisfaz ambas as premissas. Distinguimos dois casos: (a) $\mathbf{v} \not\models \varphi$ e (b) $\mathbf{v} \models \varphi$. No caso (a), para que $\mathbf{v}$ satisfaça a premissa esquerda, ela deve satisfazer $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Mas então também satisfaz a conclusão. No caso (b), para que $\mathbf{v}$ satisfaça a premissa direita, ela deve satisfazer $\Pi \setminus \Lambda$. Novamente, $\mathbf{v}$ satisfaz a conclusão.

2. A última inferência é $\wedge R$. Então π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \wedge R$$

Considere a **avaliacao** $\mathbf{v}$. Se $\mathbf{v}$ satisfaz $\Gamma \Rightarrow \Delta$, terminamos. Entao suponha que não. Como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido pela hipótese de indução, $\mathbf{v} \models \varphi$. Analogamente, como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ é válido, $\mathbf{v} \models \psi$. Mas entao $\mathbf{v} \models \varphi \wedge \psi$.

3. A última inferência é $\vee\text{L}$: Exercício.
4. A última inferência é $\rightarrow\text{L}$. Entao π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda} \rightarrow\text{L}$$

Novamente, considere a **avaliacao** $\mathbf{v}$ e suponha que $\mathbf{v}$ não satisfaça $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$. Temos de mostrar que $\mathbf{v} \not\models \varphi \rightarrow \psi$. Se $\mathbf{v}$ não satisfaz $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$, não satisfaz nem $\Gamma \Rightarrow \Delta$ nem $\Pi \Rightarrow \Lambda$. Como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido, temos $\mathbf{v} \models \varphi$. Como $\psi, \Pi \Rightarrow \Lambda$ é válido, temos $\mathbf{v} \not\models \psi$. Mas entao $\mathbf{v} \not\models \varphi \rightarrow \psi$, que é o que queríamos mostrar. $\square$

Problema 3.6. Complete a prova de **Teorema 3.25**.

pl:seq:sou:
cor:weak-soundness **Corolário 3.26.** Se $\vdash \varphi$, entao φ é uma tautologia.

pl:seq:sou:
cor:entailment-soundness **Corolário 3.27.** Se $\Gamma \vdash \varphi$, entao $\Gamma \models \varphi$.

Prova. Se $\Gamma \vdash \varphi$, entao, para algum subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, há a **derivacao** de $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$. Por **Teorema 3.25**, toda **avaliacao** $\mathbf{v}$ ou torna algum $\psi \in \Gamma_0$ falso ou torna φ verdadeiro. Logo, se $\mathbf{v} \models \Gamma$, entao também $\mathbf{v} \models \varphi$. $\square$

pl:seq:sou:
cor:consistency-soundness **Corolário 3.28.** Se Γ é satisfatível, entao é consistente.

Prova. Provamos a contrapositiva. Suponha que Γ não seja consistente. Entao há um $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito e a **derivacao** de $\Gamma_0 \Rightarrow \perp$. Por **Teorema 3.25**, $\Gamma_0 \Rightarrow \perp$ é válido. Em outras palavras, para toda **avaliacao** $\mathbf{v}$, há $\chi \in \Gamma_0$ tal que $\mathbf{v} \not\models \chi$, e como $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, esse χ também está em Γ . Assim, nenhuma $\mathbf{v}$ satisfaz Γ , e Γ não é satisfatível. $\square$

Capítulo 4

Dedução Natural

Este capítulo apresenta um sistema de dedução natural no estilo de Gentzen/Prawitz.

Para incluir ou excluir material relevante à dedução natural como sistema de prova, use a tag “prfND”.

4.1 Regras e Derivações

explanation Sistemas de dedução natural pretendem ser um paralelo próximo do raciocínio informal usado em provas matemáticas (daí serem, de certo modo, “naturais”). Provas em dedução natural começam com hipóteses. Em seguida, aplicam-se regras de inferência. As hipóteses são “descarregadas” pelas regras de inferência $\neg$ Intro, $\rightarrow$ Intro, e $\vee$ Elim, e o rótulo da hipótese descarregada é colocado ao lado da inferência para maior clareza. pl:ntd:rul:sec

Definição 4.1 (Hipótese). Uma *hipótese* é qualquer sentença na posição mais alta de qualquer ramo.

Derivações em dedução natural são certas árvores de sentenças, em que as sentenças no topo são hipóteses e, se a sentença está abaixo de um, dois ou três outros seguintes, ela deve seguir corretamente por uma regra de inferência. As sentenças no topo da inferência são chamadas de *premissas* e a sentença abaixo, de *conclusão* da inferência. As regras vêm em pares, uma regra de introdução e uma de eliminação para cada operador lógico. Elas introduzem a operador lógico na conclusão ou removem a operador lógico de uma premissa da regra. Algumas das regras permitem que uma hipótese de certo tipo seja *descarregada*. Para indicar qual hipótese é descarregada por qual inferência, também atribuímos rótulos tanto à hipótese quanto à inferência. Isso é indicado escrevendo-se a hipótese como “[φ]ⁿ.”

É costume considerar regras para todos os operadores lógicos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ e $\perp$, mesmo que alguns deles sejam definidos.

4.2 Regras Proposicionais

pl:ntd:prl:
sec

Regras para $\wedge$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge\text{Intro} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge\text{Elim} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge\text{Elim}$$

Regras para $\vee$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee\text{Intro} \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee\text{Intro} \qquad \begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \vdots \\ \varphi \vee \psi \\ \chi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi]^n \\ \vdots \\ \varphi \vee \psi \\ \chi \end{array} \vee\text{Elim}$$

Regras para $\rightarrow$

$$\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \vdots \\ \psi \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array} \rightarrow\text{Intro} \qquad \frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi} \rightarrow\text{Elim}$$

Regras para $\neg$

$$\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \vdots \\ \perp \\ \neg\varphi \end{array} \neg\text{Intro} \qquad \frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp} \neg\text{Elim}$$

Regras para $\perp$

$$\frac{\perp}{\varphi} \perp_I \qquad \begin{array}{c} [\neg\varphi]^n \\ \vdots \\ n \frac{\perp}{\varphi} \perp_C \end{array}$$

Note que $\neg$ Intro e $\perp_C$ são muito semelhantes: a diferença é que $\neg$ Intro deriva uma **sentença** negada $\neg\varphi$, mas $\perp_C$, uma **sentença** positiva φ .

Sempre que uma regra indica que alguma hipótese pode ser descarregada, nós tomamos isso como uma permissão, mas não uma exigência. Por exemplo, na regra $\rightarrow$ Intro, podemos descarregar qualquer número de hipóteses da forma φ na **derivação** da premissa ψ , inclusive zero.

4.3 Derivações

explanation

Já dissemos o que é uma hipótese e demos as regras de inferência. **Derivações** em dedução natural são geradas indutivamente a partir disso: cada **derivação** ou é uma hipótese por si só, ou consiste em uma, duas ou três **derivações** seguidas de uma inferência correta.

pl:ntd:der:
sec

Definição 4.2 (Derivação). A **derivação** de a **sentença** φ a partir de hipóteses Γ é uma árvore finita de **sentenças** que satisfaz as seguintes condições:

1. As **sentenças** no topo da árvore ou estão em Γ ou são **descarregadas** por uma inferência na árvore.
2. A **sentença** na base da árvore é φ .
3. Toda **sentença** na árvore exceto a sentença φ na base é uma premissa de uma aplicação correta de uma regra de inferência cuja conclusão está diretamente abaixo daquela **sentença** na árvore.

Dizemos então que φ é a **conclusão** da **derivação** e Γ , suas hipóteses **não descarregadas**.

Se existe a **derivação** de φ a partir de Γ , dizemos que φ é **derivável** a partir de Γ , ou, em símbolos: $\Gamma \vdash \varphi$. Se há a **derivação** de φ em que toda hipótese é **descarregada**, escrevemos $\vdash \varphi$.

Exemplo 4.3. Toda hipótese por si só é a **derivação**. Assim, por exemplo, φ por si só é a **derivação**, e ψ por si só também. Podemos obter uma nova **derivação** a partir delas aplicando, digamos, a regra $\wedge$ Intro,

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge \text{Intro}$$

Essas regras devem ser gerais: podemos substituir o φ e ψ nela por quaisquer **sentenças**, por exemplo, por χ e θ . Então a conclusão seria $\chi \wedge \theta$, e assim

$$\frac{\chi \quad \theta}{\chi \wedge \theta} \wedge \text{Intro}$$

é uma **derivação** correta. É claro que também podemos trocar as hipóteses, de modo que θ desempenhe o papel de φ e χ o de ψ . Assim,

$$\frac{\theta \quad \chi}{\theta \wedge \chi} \wedge \text{Intro}$$

também é uma **derivação** correta.

Podemos agora aplicar outra regra, digamos, $\rightarrow$ Intro, que nos permite concluir um condicional e nos permite descarregar qualquer hipótese que seja idêntica ao antecedente desse condicional. Assim, ambas as seguintes seriam **derivações** corretas:

$$1 \frac{\frac{[\chi]^1 \quad \theta}{\chi \wedge \theta} \wedge \text{Intro}}{\chi \rightarrow (\chi \wedge \theta)} \rightarrow \text{Intro} \quad 1 \frac{\frac{\chi \quad [\theta]^1}{\chi \wedge \theta} \wedge \text{Intro}}{\theta \rightarrow (\chi \wedge \theta)} \rightarrow \text{Intro}$$

Elas mostram, respectivamente, que $\theta \vdash \chi \rightarrow (\chi \wedge \theta)$ e $\chi \vdash \theta \rightarrow (\chi \wedge \theta)$.

Lembre-se de que descarregar hipóteses é uma permissão, não uma exigência: não temos de descarregar as hipóteses. Em particular, podemos aplicar uma regra mesmo que as hipóteses não estejam presentes na **derivação**. Por exemplo, o seguinte é válido, embora não haja hipótese φ a ser **descarregada**:

$$1 \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow \text{Intro}$$

4.4 Exemplos de Derivações

pl:ntd:pro:
sec

Exemplo 4.4. Vamos dar a **derivação** da **sentença** $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$.

Começamos escrevendo a conclusão desejada na parte inferior da **derivação**.

$$\overline{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi}$$

Em seguida, precisamos descobrir que tipo de inferência poderia resultar em a **sentença** desta forma. O **operador principal** da conclusão é $\rightarrow$, então tentaremos chegar à conclusão usando a regra $\rightarrow$ Intro. O melhor é anotar as suposições envolvidas e rotular as regras de inferência conforme avançamos, para que seja fácil ver se todas as suposições foram **descarregadas** ao final da prova.

$$\begin{array}{c}
[\varphi \wedge \psi]^1 \\
\vdots \\
\vdots \\
\varphi \\
1 \frac{}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi} \rightarrow \text{Intro}
\end{array}$$

Agora precisamos preencher os passos da suposição $\varphi \wedge \psi$ até φ . Como só temos um conectivo com o qual lidar, $\wedge$, devemos usar a regra $\wedge$ elim. Isso nos dá a seguinte prova:

$$\begin{array}{c}
\frac{[\varphi \wedge \psi]^1}{\varphi} \wedge \text{Elim} \\
1 \frac{}{(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi} \rightarrow \text{Intro}
\end{array}$$

Agora temos uma **derivação** correta de $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$.

Exemplo 4.5. Agora vamos dar a **derivação** de $(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

Começamos escrevendo a conclusão desejada na parte inferior da **derivação**.

$$\overline{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)}$$

Para encontrar uma regra lógica que possa nos dar esta conclusão, observamos os conectivos lógicos na conclusão: $\neg$, $\vee$ e $\rightarrow$. Por enquanto, só nos interessa a primeira ocorrência de $\rightarrow$, porque é o **operador principal** da **sentença** na conclusão, enquanto $\neg$, $\vee$ e a segunda ocorrência de $\rightarrow$ estão dentro do escopo de outro conectivo, então cuidaremos deles depois. Começamos, portanto, com a regra $\rightarrow$ Intro. Uma aplicação correta deve ser assim:

$$\begin{array}{c}
[\neg\varphi \vee \psi]^1 \\
\vdots \\
\vdots \\
\varphi \rightarrow \psi \\
1 \frac{}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} \rightarrow \text{Intro}
\end{array}$$

Isso nos deixa com duas possibilidades para continuar. Podemos continuar trabalhando de baixo para cima e procurar outra aplicação da regra $\rightarrow$ Intro, ou podemos trabalhar de cima para baixo e aplicar a regra $\vee$ Elim. Vamos adotar a segunda opção. Usaremos a suposição $\neg\varphi \vee \psi$ como a premissa mais à esquerda de $\vee$ Elim. Para uma aplicação válida de $\vee$ Elim, as outras duas premissas devem ser idênticas à conclusão $\varphi \rightarrow \psi$, mas cada uma pode ser derivada, por sua vez, de outra suposição, a saber, um dos dois disjuntos de $\neg\varphi \vee \psi$. Nossa **derivação** ficará, então, assim:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
& [\neg\varphi]^2 & [\psi]^2 \\
& \vdots & \vdots \\
2 \frac{[\neg\varphi \vee \psi]^1}{\varphi \rightarrow \psi} & & \varphi \rightarrow \psi \\
& \varphi \rightarrow \psi & \\
1 \frac{}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} & \rightarrow\text{Intro} & \vee\text{Elim}
\end{array}
\end{array}$$

Em cada um dos dois ramos à direita, queremos derivar $\varphi \rightarrow \psi$, o que é melhor feito usando $\rightarrow\text{Intro}$.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
& [\neg\varphi]^2, [\varphi]^3 & [\psi]^2, [\varphi]^4 \\
& \vdots & \vdots \\
& \psi & \psi \\
2 \frac{[\neg\varphi \vee \psi]^1}{\varphi \rightarrow \psi} & 3 \frac{}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro} & 4 \frac{}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro} \\
& \varphi \rightarrow \psi & \\
1 \frac{}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} & \rightarrow\text{Intro} & \vee\text{Elim}
\end{array}
\end{array}$$

Nas duas partes que faltam na **derivação**, precisamos de **derivações** de ψ a partir de $\neg\varphi$ e φ no meio, e a partir de φ e ψ à esquerda. Começemos pelo primeiro caso. $\neg\varphi$ e φ são as duas premissas de $\neg\text{Elim}$:

$$\begin{array}{c}
\frac{[\neg\varphi]^2 \quad [\varphi]^3}{\perp} \neg\text{Elim} \\
\vdots \\
\psi
\end{array}$$

Usando $\perp_I$, podemos obter ψ como conclusão e completar o ramo.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
& [\neg\varphi]^2 & [\varphi]^3 \\
& \vdots & \vdots \\
& \perp & \\
& \psi & \perp_I \\
2 \frac{[\neg\varphi \vee \psi]^1}{\varphi \rightarrow \psi} & 3 \frac{}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro} & 4 \frac{[\psi]^2, [\varphi]^4}{\psi} \rightarrow\text{Intro} \\
& \varphi \rightarrow \psi & \\
1 \frac{}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} & \rightarrow\text{Intro} & \vee\text{Elim}
\end{array}
\end{array}$$

Vejamos agora o ramo mais à direita. Aqui é importante perceber que a definição de **derivação** *permite que hipóteses sejam descarregadas* mas *não exige* que o sejam. Em outras palavras, se pudermos derivar ψ a partir de uma das suposições φ e ψ sem usar a outra, tudo bem. E para derivar ψ a partir de ψ é trivial: ψ por si só é tal a **derivação**, e nenhuma inferência é necessária. Portanto, podemos simplesmente eliminar a suposição φ .

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{[\neg\varphi]^2 \quad [\varphi]^3}{\perp} \neg\text{Elim}}{\frac{[\neg\varphi \vee \psi]^1 \quad \frac{3 \frac{\frac{\perp}{\psi} \perp_I}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro} \quad \frac{[\psi]^2}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro}}{\varphi \rightarrow \psi} \vee\text{Elim}} \rightarrow\text{Intro} \\
1 \frac{}{(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)} \rightarrow\text{Intro}
\end{array}$$

Observe que, na **derivação** concluída, a inferência $\rightarrow\text{Intro}$ mais à direita na verdade não descarrega nenhuma hipótese.

Exemplo 4.6. Até agora não precisamos da regra $\perp_C$. Ela é especial porque nos permite descarregar uma hipótese que não é uma sub-**fórmula** da conclusão da regra. Está intimamente relacionada à regra $\perp_I$. Na verdade, a regra $\perp_I$ é um caso especial da regra $\perp_C$ —existe uma lógica chamada “lógica intuicionista” na qual apenas $\perp_I$ é permitida. A regra $\perp_C$ é um último recurso quando nada mais funciona. Por exemplo, suponha que queiramos derivar $\varphi \vee \neg\varphi$. Nossa estratégia usual seria tentar derivar $\varphi \vee \neg\varphi$ usando $\vee\text{Intro}$. Mas isso exigiria derivar φ ou $\neg\varphi$ a partir de nenhuma suposição, e isso não pode ser feito. $\perp_C$ ao resgate!

$$\begin{array}{c}
[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \\
\vdots \\
1 \frac{\perp}{\varphi \vee \neg\varphi} \perp_C
\end{array}$$

Agora procuramos a **derivação** de $\perp$ a partir de $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$. Como $\perp$ é a conclusão de $\neg\text{Elim}$, podemos tentar isso:

$$\begin{array}{c}
\frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \quad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1}{\frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\perp} \neg\text{Elim}} \perp_C \\
1 \frac{}{\varphi \vee \neg\varphi} \perp_C
\end{array}$$

Nossa estratégia para encontrar a **derivação** de $\neg\varphi$ exige uma aplicação de $\neg\text{Intro}$:

$$\begin{array}{c}
\frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1, [\varphi]^2 \quad [\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1}{\frac{\frac{\perp}{\neg\varphi} \neg\text{Intro} \quad \varphi}{\perp} \neg\text{Elim}} \perp_C \\
1 \frac{}{\varphi \vee \neg\varphi} \perp_C
\end{array}$$

Aqui, podemos obter $\perp$ facilmente aplicando $\neg\text{Elim}$ à suposição $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ e a $\varphi \vee \neg\varphi$, que segue da nossa nova suposição φ por $\vee\text{Intro}$:

$$\begin{array}{c}
\frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \quad \frac{[\varphi]^2}{\varphi \vee \neg\varphi} \vee\text{Intro}}{\frac{\perp}{\neg\varphi} \neg\text{Intro}} \neg\text{Elim} \quad \frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1}{\vdots} \neg\text{Elim} \\
\frac{\frac{\perp}{\neg\varphi} \neg\text{Intro} \quad \frac{\perp}{\varphi \vee \neg\varphi} \neg\text{Elim}}{1 \frac{\perp}{\varphi \vee \neg\varphi} \perp_C}
\end{array}$$

No lado direito usamos a mesma estratégia, exceto que obtemos φ por $\perp_C$:

$$\begin{array}{c}
\frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \quad \frac{[\varphi]^2}{\varphi \vee \neg\varphi} \vee\text{Intro}}{\frac{\perp}{\neg\varphi} \neg\text{Intro}} \neg\text{Elim} \quad \frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^1 \quad \frac{[\neg\varphi]^3}{\varphi \vee \neg\varphi} \vee\text{Intro}}{\frac{\perp}{\varphi} \perp_C} \neg\text{Elim} \\
\frac{\frac{\perp}{\neg\varphi} \neg\text{Intro} \quad \frac{\perp}{\varphi} \perp_C}{1 \frac{\perp}{\varphi \vee \neg\varphi} \perp_C}
\end{array}$$

Problema 4.1. Dê *derivações* que mostrem o seguinte:

1. $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
2. $\varphi \vee (\psi \vee \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
3. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$.
4. $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$.

Problema 4.2. Dê *derivações* que mostrem o seguinte:

1. $(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi \vdash \varphi \rightarrow \chi$.
2. $(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$.
3. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.
4. $\psi \rightarrow \varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$.
5. $\vdash (\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$.
6. $\vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\psi$.
7. $\varphi \rightarrow \chi \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\chi)$.
8. $\varphi \wedge \neg\chi \vdash \neg(\varphi \rightarrow \chi)$.
9. $\varphi \vee \psi, \neg\psi \vdash \varphi$.
10. $\neg\varphi \vee \neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$.
11. $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$.
12. $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

Problema 4.3. Dê *derivações* que mostrem o seguinte:

1. $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \varphi$.
2. $\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$.
3. $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\varphi \vee \psi$.
4. $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.
5. $\varphi \rightarrow \psi, \neg\varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$.
6. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi \vdash (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$.
7. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \vdash \varphi$.
8. $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$.

(Todos exigem a regra $\perp_C$.)

4.5 Noções da Teoria da Prova

pl:ntd:ptn:
sec

Esta seção reúne as definições da relação de demonstrabilidade e de consistência para a dedução natural.

explanation Assim como definimos várias noções semânticas importantes (validade, consequência, satisfatibilidade), agora definimos noções *da Teoria da Prova* correspondentes. Elas não são definidas por apelo à satisfação de **sentenças** em **estruturas**, mas por apelo à **derivabilidade** ou **não derivabilidade** de certas **sentenças** a partir de outras. Foi uma descoberta importante que essas noções coincidem. Que coincidem é o conteúdo dos teoremas de *correção* e *completude*.

Definição 4.7 (Teoremas). Uma **sentença** φ é um *teorema* se há uma **derivação** de φ em dedução natural na qual todas as hipóteses são **descarregadas**. Escrevemos $\vdash \varphi$ se φ é um teorema e $\nvdash \varphi$ se não o é.

Definição 4.8 (Derivabilidade). A **sentença** φ é *derivável* de um conjunto de **sentenças** Γ , $\Gamma \vdash \varphi$, se há uma **derivação** com conclusão φ e na qual toda hipótese é ou **descarregada** ou está em Γ . Se φ não é **derivável** de Γ , escrevemos $\Gamma \nvdash \varphi$.

Definição 4.9 (Consistência). Um conjunto de **sentenças** Γ é *inconsistente* se, e somente se, $\Gamma \vdash \perp$. Se Γ não é inconsistente, isto é, se $\Gamma \nvdash \perp$, dizemos que é *consistente*.

Proposição 4.10 (Reflexividade). Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

pl:ntd:ptn:
prop:reflexivity

Prova. A hipótese φ por si só é uma **derivação** de φ em que toda hipótese **não descarregada** (isto é, φ) está em Γ . $\square$

pl:ntd:ptn:
prop:monotonicity

Proposição 4.11 (Monotonicidade). *Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Delta \vdash \varphi$.*

Prova. Qualquer **derivação** de φ a partir de Γ é também uma **derivação** de φ a partir de Δ . $\square$

pl:ntd:ptn:
prop:transitivity

Proposição 4.12 (Transitividade). *Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.*

Prova. Se $\Gamma \vdash \varphi$, há uma **derivação** δ_0 de φ com todas as hipóteses **não descarregadas** em Γ . Se $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, então há uma **derivação** δ_1 de ψ com todas as hipóteses **não descarregadas** em $\{\varphi\} \cup \Delta$. Considere agora:

$$\begin{array}{c}
 \Delta, [\varphi]^1 \\
 \vdots \\
 \delta_1 \\
 \vdots \\
 \psi \\
 \hline
 1 \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow \text{Intro} \\
 \hline
 \psi
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \Gamma \\
 \vdots \\
 \delta_0 \\
 \vdots \\
 \varphi \\
 \hline
 \psi \rightarrow \text{Elim}
 \end{array}$$

As hipóteses **não descarregadas** estão agora todas entre $\Gamma \cup \Delta$, de modo que isto mostra $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$. $\square$

Quando $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ é um conjunto finito, podemos usar a notação simplificada $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \vdash \psi$ para $\Gamma \vdash \psi$; em particular, $\varphi \vdash \psi$ significa que $\{\varphi\} \vdash \psi$.

Note que se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\varphi \vdash \psi$, então $\Gamma \vdash \psi$. Segue também que se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi_i$ para cada i , então $\Gamma \vdash \psi$.

pl:ntd:ptn:
prop:incons

Proposição 4.13. *As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. Γ é inconsistente.
2. $\Gamma \vdash \varphi$ para toda **sentença** φ .
3. $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg \varphi$ para alguma **sentença** φ .

Prova. Exercício. $\square$

Problema 4.4. Prove **Proposição 4.13**

pl:ntd:ptn:
prop:proves-compact

Proposição 4.14 (Compacidade).

1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então há um subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \vdash \varphi$.
2. Se todo subconjunto finito de Γ é consistente, então Γ é consistente.

Prova. 1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então há uma **derivação** δ de φ a partir de Γ . Seja Γ_0 o conjunto de hipóteses **não descarregadas** de δ . Como toda **derivação** é finita, Γ_0 só pode conter finitamente muitas **sentenças**. Assim, δ é uma **derivação** de φ a partir de um Γ_0 finito $\subseteq \Gamma$.

2. Isto é a contrapositiva de (1) no caso especial $\varphi \equiv \perp$. □

4.6 Derivabilidade e Consistência

Estabeleceremos agora várias propriedades da relação de **derivabilidade**. Elas são independentemente interessantes, mas cada uma desempenhará um papel na prova do teorema da completude. pl:ntd:prv:
sec

Proposição 4.15. *Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente, então Γ é inconsistente.* pl:ntd:prv:
prop:provability-contr

Prova. Seja a **derivação** de φ a partir de Γ igual a δ_1 e a **derivação** de $\perp$ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ igual a δ_2 . Podemos então derivar:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, [\varphi]^1 \\ \vdots \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \perp \\ 1 \frac{}{\neg\varphi} \neg\text{Intro} \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \varphi \\ \neg\text{Elim} \end{array}}{\perp}$$

Na nova **derivação**, a hipótese φ é **descarregada**, de modo que é uma **derivação** a partir de Γ . □

Proposição 4.16. *$\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente.* pl:ntd:prv:
prop:prov-incons

Prova. Primeiro suponha que $\Gamma \vdash \varphi$, isto é, há uma **derivação** δ_0 de φ a partir de hipóteses **não descarregadas** Γ . Obtemos uma **derivação** de $\perp$ a partir de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ da seguinte forma:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_0 \\ \vdots \\ \varphi \\ \neg\varphi \end{array}}{\perp} \neg\text{Elim}$$

Agora suponha que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente, e seja δ_1 a **derivação** correspondente de $\perp$ a partir de hipóteses **não descarregadas** em $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Obtemos uma **derivação** de φ apenas a partir de Γ usando $\perp_C$:

$$\begin{array}{c}
\Gamma, [\neg\varphi]^1 \\
\vdots \\
\delta_1 \\
\vdots \\
\perp \\
1 \frac{}{\varphi} \perp_C
\end{array}
\quad \square$$

Problema 4.5. Prove que $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se, e somente se, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente.

pl:ntd:prv: prop:explicit-inc **Proposição 4.17.** Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\neg\varphi \in \Gamma$, então Γ é inconsistente.

Prova. Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$ e $\neg\varphi \in \Gamma$. Então há uma **derivação** δ de φ a partir de Γ . Considere esta aplicação simples da regra $\neg$ Elim:

$$\begin{array}{c}
\Gamma \\
\vdots \\
\delta \\
\vdots \\
\varphi \\
\neg\varphi \quad \varphi \\
\hline
\perp \quad \neg\text{Elim}
\end{array}$$

Como $\neg\varphi \in \Gamma$, todas as hipóteses **não descarregadas** estão em Γ ; isto mostra que $\Gamma \vdash \perp$. $\square$

pl:ntd:prv: prop:provability-exhaustive **Proposição 4.18.** Se $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ são ambos inconsistentes, então Γ é inconsistente.

Prova. Há **derivações** δ_1 e δ_2 de $\perp$ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e de $\perp$ a partir de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, respectivamente. Podemos então derivar

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma, [\neg\varphi]^2 & & \Gamma, [\varphi]^1 \\
\vdots & & \vdots \\
\delta_2 & & \delta_1 \\
\vdots & & \vdots \\
\perp & & \perp \\
2 \frac{}{\neg\neg\varphi} \neg\text{Intro} & 1 \frac{}{\neg\varphi} \neg\text{Intro} & \\
\hline
\perp & \neg\text{Elim} &
\end{array}$$

Como as hipóteses φ e $\neg\varphi$ são **descarregadas**, isto é uma **derivação** de $\perp$ apenas a partir de Γ . Logo Γ é inconsistente. $\square$

4.7 Derivabilidade e os Conectivos Proposicionais

pl:ntd:ppr: sec Estabelecemos que a relação de **derivabilidade** $\vdash$ da dedução natural é forte o *explanation* suficiente para estabelecer alguns fatos básicos envolvendo os conectivos proposicionais, tais como $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ e $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$ (modus ponens). Esses fatos são necessários para a prova do teorema da completude.

pl:ntd:ppr: prop:provability-land **Proposição 4.19.**

1. Tanto $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ quanto $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$.

2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

*pl:ntd:ppr:
prop:provability-land-left
pl:ntd:ppr:
prop:provability-land-right*

Prova. 1. Podemos derivar ambos:

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge \text{Elim} \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge \text{Elim}$$

2. Podemos derivar:

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge \text{Intro}$$

□

Proposição 4.20.

*pl:ntd:ppr:
prop:provability-lor*

1. $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ é inconsistente.

2. Tanto $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ quanto $\psi \vdash \varphi \vee \psi$.

Prova. 1. Considere a seguinte **derivação**:

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\neg\varphi \quad [\varphi]^1}{\perp} \neg\text{Elim} \quad \frac{\neg\psi \quad [\psi]^1}{\perp} \neg\text{Elim}}{1 \quad \frac{\varphi \vee \psi \quad \perp}{\perp} \vee\text{Elim}} \end{array}$$

Esta é a **derivação** de $\perp$ a partir das hipóteses não descarregadas $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$ e $\neg\psi$.

2. Podemos derivar ambos:

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee \text{Intro} \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee \text{Intro}$$

□

Proposição 4.21.

*pl:ntd:ppr:
prop:provability-lif
pl:ntd:ppr:
prop:provability-lif-left
pl:ntd:ppr:
prop:provability-lif-right*

1. $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$.

2. Tanto $\neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ quanto $\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Prova. 1. Podemos derivar:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi} \rightarrow \text{Elim}$$

2. Isso é mostrado pelas duas **derivações** seguintes:

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\neg\varphi \quad [\varphi]^1}{\perp} \neg\text{Elim}}{\frac{\perp}{\psi} \perp_I} \rightarrow \text{Intro} \quad \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow \text{Intro} \end{array}$$

Note que $\rightarrow \text{Intro}$ pode, mas não precisa, descarregar a hipótese φ . □

4.8 Correção

pl:ntd:sou:
sec

Um sistema de **derivação**, como a dedução natural, é *correto* se não pode derivar coisas que de fato não seguem. A correção é assim uma espécie de propriedade de segurança garantida para sistemas de **derivação**. Dependendo de qual propriedade da Teoria da Prova está em questão, gostaríamos de saber, por exemplo, que

explanation

1. toda **sentença derivável** é uma tautologia;
2. se uma **sentença** é **derivável** a partir de outras, ela também é uma consequência delas;
3. se um conjunto de **sentenças** é inconsistente, ele é insatisfatível.

Estas são propriedades importantes de um sistema de **derivação**. Se alguma delas não vale, o sistema de **derivação** é deficiente—ele **deriva** demais. Consequentemente, estabelecer a correção de um sistema de **derivação** é da maior importância.

pl:ntd:sou:
thm:soundness

Teorema 4.22 (Correção). *Se φ é **derivável** a partir das hipóteses **não descarregadas** Γ , então $\Gamma \models \varphi$.*

Prova. Seja δ uma **derivação** de φ . Procedemos por indução no número de inferências em δ .

Para a base da indução, mostramos a afirmação quando o número de inferências é 0. Neste caso, δ consiste apenas de uma única **sentença** φ , isto é, uma hipótese. Essa hipótese é **não descarregada**, pois hipóteses só podem ser **descarregadas** por inferências, e não há inferências. Assim, qualquer **valoração** $\mathbf{v}$ que satisfaz todas as hipóteses **não descarregadas** da prova também satisfaz φ .

Agora o passo indutivo. Suponha que δ contém n inferências. A(s) premissa(s) da inferência mais baixa são **derivadas** usando sub-**derivações**, cada uma das quais contém menos de n inferências. Assumimos a hipótese de indução: as premissas da inferência mais baixa seguem das hipóteses **não descarregadas** das sub-**derivações** que terminam nessas premissas. Temos que mostrar que a conclusão φ segue das hipóteses **não descarregadas** de toda a prova.

Distinguimos casos de acordo com o tipo da inferência mais baixa. Primeiro, consideramos as possíveis inferências com apenas uma premissa.

1. Suponha que a última inferência é $\neg$ -Intro: a **derivação** tem a forma

$$\begin{array}{c} \Gamma, [\varphi]^n \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \perp \\ n \frac{}{\neg\varphi} \neg\text{-Intro} \end{array}$$

Pela hipótese de indução, $\perp$ segue das hipóteses **não descarregadas** $\Gamma \cup \{\varphi\}$ de δ_1 . Considere a **valoração** $\mathbf{v}$. Precisamos mostrar que, se $\mathbf{v} \models \Gamma$, então $\mathbf{v} \models \neg\varphi$. Suponha por redução ao absurdo que $\mathbf{v} \models \Gamma$, mas $\mathbf{v} \not\models \neg\varphi$, isto é, $\mathbf{v} \models \varphi$. Isto significaria que $\mathbf{v} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$. Isto é contrário à nossa hipótese de indução. Logo, $\mathbf{v} \models \neg\varphi$.

2. A última inferência é $\wedge$ Elim: há duas variantes: φ ou ψ pode ser inferido da premissa $\varphi \wedge \psi$. Considere o primeiro caso. A **derivação** δ tem este aspecto:

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\varphi} \wedge\text{Elim}$$

Pela hipótese de indução, $\varphi \wedge \psi$ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ de δ_1 . Considere a **estrutura** $\mathbf{v}$. Precisamos mostrar que, se $\mathbf{v} \models \Gamma$, então $\mathbf{v} \models \varphi$. Suponha $\mathbf{v} \models \Gamma$. Pela nossa hipótese de indução ($\Gamma \models \varphi \wedge \psi$), sabemos que $\mathbf{v} \models \varphi \wedge \psi$. Por definição, $\mathbf{v} \models \varphi \wedge \psi$ se, e somente se, $\mathbf{v} \models \varphi$ e $\mathbf{v} \models \psi$. (O caso em que ψ é inferido de $\varphi \wedge \psi$ é tratado de forma similar.)

3. A última inferência é $\vee$ Intro: há duas variantes: $\varphi \vee \psi$ pode ser inferido da premissa φ ou da premissa ψ . Considere o primeiro caso. A **derivação** tem a forma

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \varphi \end{array}}{\varphi \vee \psi} \vee\text{Intro}$$

Pela hipótese de indução, φ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ de δ_1 . Considere a **valoração** $\mathbf{v}$. Precisamos mostrar que, se $\mathbf{v} \models \Gamma$, então $\mathbf{v} \models \varphi \vee \psi$. Suponha $\mathbf{v} \models \Gamma$; então $\mathbf{v} \models \varphi$, pois $\Gamma \models \varphi$ (a hipótese de indução). Logo também deve ser o caso que $\mathbf{v} \models \varphi \vee \psi$. (O caso em que $\varphi \vee \psi$ é inferido de ψ é tratado de forma similar.)

4. A última inferência é $\rightarrow$ Intro: $\varphi \rightarrow \psi$ é inferido de uma subprova com hipótese φ e conclusão ψ , isto é,

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma, [\varphi]^n \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow\text{Intro}$$

Pela hipótese de indução, ψ segue das hipóteses **não descarregadas** de δ_1 , isto é, $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$. Considere a **valoração** $\mathbf{v}$. As hipóteses **não descarregadas** de δ são apenas Γ , pois φ é descartada na última inferência. Precisamos mostrar que $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$. Por redução ao absurdo, suponha que para alguma **valoração** $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \models \Gamma$ mas $\mathbf{v} \not\models \varphi \rightarrow \psi$. Assim, $\mathbf{v} \models \varphi$ e $\mathbf{v} \not\models \psi$. Mas por hipótese, ψ é uma consequência de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, isto é, $\mathbf{v} \models \psi$, o que é uma contradição. Logo, $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

5. A última inferência é $\perp_I$: aqui, δ termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \perp \\ \varphi \end{array}}{\perp_I}$$

Pela hipótese de indução, $\Gamma \models \perp$. Temos que mostrar que $\Gamma \models \varphi$. Suponha o contrário; então para algum $\mathbf{v}$ temos $\mathbf{v} \models \Gamma$ e $\mathbf{v} \not\models \varphi$. Mas sempre temos $\mathbf{v} \models \perp$, de modo que isto significaria que $\Gamma \not\models \perp$, contrariando a hipótese de indução.

6. A última inferência é $\perp_C$: Exercício.

Agora consideremos as possíveis inferências com várias premissas: $\vee\text{Elim}$, $\wedge\text{Intro}$, e $\rightarrow\text{Elim}$.

1. A última inferência é $\wedge\text{Intro}$. $\varphi \wedge \psi$ é inferido das premissas φ e ψ e δ tem a forma

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \vdots \\ \delta_2 \\ \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi} \wedge\text{Intro}$$

Pela hipótese de indução, φ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ_1 de δ_1 e ψ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ_2 de δ_2 . As hipóteses **não descarregadas** de δ são $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, de modo que temos que mostrar que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models \varphi \wedge \psi$. Considere a **valoração** $\mathbf{v}$ com $\mathbf{v} \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Como $\mathbf{v} \models \Gamma_1$, deve ser o caso que $\mathbf{v} \models \varphi$, pois $\Gamma_1 \models \varphi$, e como $\mathbf{v} \models \Gamma_2$, $\mathbf{v} \models \psi$, pois $\Gamma_2 \models \psi$. Juntas, $\mathbf{v} \models \varphi \wedge \psi$.

2. A última inferência é $\vee\text{Elim}$: Exercício.

3. A última inferência é $\rightarrow\text{Elim}$. ψ é inferido das premissas $\varphi \rightarrow \psi$ e φ . A **derivação** δ tem este aspecto:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \vdots \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \varphi \end{array} \\
\hline
\psi \quad \rightarrow\text{Elim}
\end{array}
\quad \square$$

Pela hipótese de indução, $\varphi \rightarrow \psi$ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ_1 de δ_1 e φ segue das hipóteses **não descarregadas** Γ_2 de δ_2 . Considere a **valoração** $\mathbf{v}$. Precisamos mostrar que, se $\mathbf{v} \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, então $\mathbf{v} \models \psi$. Suponha $\mathbf{v} \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Como $\Gamma_1 \models \varphi \rightarrow \psi$, $\mathbf{v} \models \varphi \rightarrow \psi$. Como $\Gamma_2 \models \varphi$, temos $\mathbf{v} \models \varphi$. Isto significa que $\mathbf{v} \models \psi$ (pois se $\mathbf{v} \not\models \psi$, como $\mathbf{v} \models \varphi$, teríamos $\mathbf{v} \not\models \varphi \rightarrow \psi$, contradizendo $\mathbf{v} \models \varphi \rightarrow \psi$).

4. A última inferência é $\neg$ Elim: Exercício.

Problema 4.6. Complete a prova de **Teorema 4.22**.

Corolário 4.23. Se $\vdash \varphi$, então φ é uma tautologia.

*pl:ntd:sou:
cor:weak-soundness*

Corolário 4.24. Se Γ é satisfatível, então é consistente.

*pl:ntd:sou:
cor:consistency-soundness*

Prova. Provamos a contrapositiva. Suponha que Γ não é consistente. Então $\Gamma \vdash \perp$, isto é, há uma **derivação** de $\perp$ a partir de hipóteses **não descarregadas** em Γ . Por **Teorema 4.22**, qualquer **valoração** $\mathbf{v}$ que satisfaz Γ deve satisfazer $\perp$. Como $\mathbf{v} \not\models \perp$ para toda **valoração** $\mathbf{v}$, nenhuma $\mathbf{v}$ pode satisfazer Γ , isto é, Γ não é satisfatível. $\square$

Capítulo 5

Tableaux

This chapter presents a signed analytic tableaux system.
To include or exclude material relevant to natural deduction as a proof system, use the “prfTab” tag.

-NoValue-

5.1 Rules and Tableaux

pl:tab:rul:
sec

A **tableau** is a systematic survey of the possible ways a **sentença** can be true or false in a **estrutura**. The building blocks of a tableau are **fórmulas assinadas**: **sentenças** plus a truth value “sign,” either $\mathbb{T}$ or $\mathbb{F}$. These signed **fórmulas** are arranged in a (downward growing) tree.

Definição 5.1. A **fórmula assinada** is a pair consisting of a truth value and a **sentença**, O.s., either:

$$\mathbb{T}\varphi \text{ or } \mathbb{F}\varphi.$$

Intuitively, we might read $\mathbb{T}\varphi$ as “ φ might be true” and $\mathbb{F}\varphi$ as “ φ might be false” (in some **estrutura**).

Each **fórmula assinada** in the tree is either an *assumption* (which are listed at the very top of the tree), or it is obtained from a **fórmula assinada** above it by one of a number of rules of inference. There are two rules for each possible **operador principal** of the preceding **fórmula**, one for the case where the sign is $\mathbb{T}$, and one for the case where the sign is $\mathbb{F}$. Some rules allow the tree to branch, and some only add **fórmulas assinadas** to the branch. A rule may be (and often must be) applied not to the immediately preceding **fórmula assinada**, but to any **fórmula assinada** in the branch from the root to the place the rule is applied.

A branch is *closed* when it contains both $\mathbb{T}\varphi$ and $\mathbb{F}\varphi$. A closed **tableau** is one where every branch is closed. Under the intuitive interpretation, any

branch describes a joint possibility, but $\mathbb{T}\varphi$ and $\mathbb{F}\varphi$ are not jointly possible. In other words, if a branch is closed, the possibility it describes has been ruled out. In particular, that means that a closed **tableau** rules out all possibilities of simultaneously making every assumption of the form $\mathbb{T}\varphi$ true and every assumption of the form $\mathbb{F}\varphi$ false.

A closed **tableau for** φ is a closed **tableau** with root $\mathbb{F}\varphi$. If such a closed **tableau** exists, all possibilities for φ being false have been ruled out; O.s., φ must be true in every **estrutura**.

-NoValue-

5.2 Propositional Rules

Rules for $\neg$

pl:tab:prl:
sec

$$\frac{\mathbb{T}\neg\varphi}{\mathbb{F}\varphi} \neg\mathbb{T} \qquad \frac{\mathbb{F}\neg\varphi}{\mathbb{T}\varphi} \neg\mathbb{F}$$

Rules for $\wedge$

$$\frac{\mathbb{T}\varphi \wedge \psi}{\mathbb{T}\varphi \quad \mathbb{T}\psi} \wedge\mathbb{T} \qquad \frac{\mathbb{F}\varphi \wedge \psi}{\mathbb{F}\varphi \quad | \quad \mathbb{F}\psi} \wedge\mathbb{F}$$

Rules for $\vee$

$$\frac{\mathbb{T}\varphi \vee \psi}{\mathbb{T}\varphi \quad | \quad \mathbb{T}\psi} \vee\mathbb{T} \qquad \frac{\mathbb{F}\varphi \vee \psi}{\mathbb{F}\varphi \quad \mathbb{F}\psi} \vee\mathbb{F}$$

Rules for $\rightarrow$

$$\frac{\mathbb{T}\varphi \rightarrow \psi}{\mathbb{F}\varphi \quad | \quad \mathbb{T}\psi} \rightarrow\mathbb{T} \qquad \frac{\mathbb{F}\varphi \rightarrow \psi}{\mathbb{T}\varphi \quad \mathbb{F}\psi} \rightarrow\mathbb{F}$$

The Cut Rule

$$\frac{\mathbb{T}\varphi \quad \mathbb{F}\varphi}{\text{Cut}}$$

The Cut rule is not applied “to” a previous *fórmula assinada*; rather, it allows every branch in a *tableau* to be split in two, one branch containing $\mathbb{T}\varphi$, the other $\mathbb{F}\varphi$. It is not necessary—any set of *fórmulas assinadas* with a closed *tableau* has one not using Cut—but it allows us to combine *tableaux* in a convenient way.

-NoValue-

5.3 Tableaux

pl:tab:der: sec We’ve said what an assumption is, and we’ve given the rules of inference. explanation *Tableaux* are inductively generated from these: each *tableau* either is a single branch consisting of one or more assumptions, or it results from a *tableau* by applying one of the rules of inference on a branch.

Definição 5.2 (Tableau). A *tableau* for assumptions $S_1\varphi_1, \dots, S_n\varphi_n$ (where each S_i is either $\mathbb{T}$ or $\mathbb{F}$) is a finite tree of *fórmulas assinadas* satisfying the following conditions:

1. The n topmost *fórmulas assinadas* of the tree are $S_i\varphi_i$, one below the other.
2. Every *fórmula assinada* in the tree that is not one of the assumptions results from a correct application of an inference rule to a *fórmula assinada* in the branch above it.

A branch of a *tableau* is *closed* iff it contains both $\mathbb{T}\varphi$ and $\mathbb{F}\varphi$, and *open* otherwise. A *tableau* in which every branch is closed is a *closed tableau* (for its set of assumptions). If a *tableau* is not closed, O.s., if it contains at least one open branch, it is *open*.

Exemplo 5.3. Every set of assumptions on its own is a *tableau*, but it will generally not be closed. (Obviously, it is closed only if the assumptions already contain a pair of *fórmulas assinadas* $\mathbb{T}\varphi$ and $\mathbb{F}\varphi$.)

From a *tableau* (open or closed) we can obtain a new, larger one by applying one of the rules of inference to a *fórmula assinada* φ in it. The rule will append one or more *fórmulas assinadas* to the end of any branch containing the occurrence of φ to which we apply the rule.

For instance, consider the assumption $\mathbb{T}\varphi \wedge \neg\varphi$. Here is the (open) *tableau* consisting of just that assumption:

1. $\mathbb{T}\varphi \wedge \neg\varphi$ Assumption

We obtain a new **tableau** from it by applying the $\wedge T$ rule to the assumption. That rule allows us to add two new lines to the **tableau**, $T\varphi$ and $T\neg\varphi$:

- | | | |
|----|-------------------------------|--------------|
| 1. | $T\varphi \wedge \neg\varphi$ | Assumption |
| 2. | $T\varphi$ | $\wedge T 1$ |
| 3. | $T\neg\varphi$ | $\wedge T 1$ |

When we write down **tableaux**, we record the rules we've applied on the right (p.ex., $\wedge T 1$ means that the **fórmula assinada** on that line is the result of applying the $\wedge T$ rule to the **fórmula assinada** on line 1). This new **tableau** now contains additional **fórmulas assinadas**, but to only one ($T\neg\varphi$) can we apply a rule (in this case, the $\neg T$ rule). This results in the closed **tableau**

- | | | |
|----|-------------------------------|--------------|
| 1. | $T\varphi \wedge \neg\varphi$ | Assumption |
| 2. | $T\varphi$ | $\wedge T 1$ |
| 3. | $T\neg\varphi$ | $\wedge T 1$ |
| 4. | $F\varphi$ | $\neg T 3$ |
| | $\otimes$ | |

-NoValue-

5.4 Examples of Tableaux

Exemplo 5.4. Let's find a closed **tableau** for the **sentença** $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$.

pl:tab:pro:
sec

We begin by writing the corresponding assumption at the top of the **tableau**.

- | | | |
|----|--|------------|
| 1. | $F(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ | Assumption |
|----|--|------------|

There is only one assumption, so only one **fórmula assinada** to which we can apply a rule. (For every **fórmula assinada**, there is always at most one rule that can be applied: it's the rule for the corresponding sign and **operador principal** of the **sentença**.) In this case, this means, we must apply $\rightarrow F$.

- | | | |
|----|--|-------------------|
| 1. | $F(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ ✓ | Assumption |
| 2. | $T\varphi \wedge \psi$ | $\rightarrow F 1$ |
| 3. | $F\varphi$ | $\rightarrow F 1$ |

To keep track of which **fórmulas assinadas** we have applied their corresponding rules to, we write a checkmark next to the sentence. However, *only* write a checkmark if the rule has been applied to all open branches. Once a **fórmula assinada** has had the corresponding rule applied in every open branch, we will not have to return to it and apply the rule again. In this case, there is only one branch, so the rule only has to be applied once. (Note that checkmarks are only a convenience for constructing tableaux and are not officially part of the syntax of tableaux.)

There is one new **fórmula assinada** to which we can apply a rule: the $\mathbb{T} \varphi \wedge \psi$ on line 2. Applying the $\wedge \mathbb{T}$ rule results in:

1.	$\mathbb{F} (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi \checkmark$	Assumption
2.	$\mathbb{T} \varphi \wedge \psi \checkmark$	$\rightarrow \mathbb{F} 1$
3.	$\mathbb{F} \varphi$	$\rightarrow \mathbb{F} 1$
4.	$\mathbb{T} \varphi$	$\wedge \mathbb{T} 2$
5.	$\mathbb{T} \psi$	$\wedge \mathbb{T} 2$
	$\otimes$	

Since the branch now contains both $\mathbb{T} \varphi$ (on line 4) and $\mathbb{F} \varphi$ (on line 3), the branch is closed. Since it is the only branch, the **tableau** is closed. We have found a closed **tableau** for $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$.

Exemplo 5.5. Now let's find a closed **tableau** for $(\neg \varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

We begin with the corresponding assumption:

1.	$\mathbb{F} (\neg \varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \checkmark$	Assumption
----	---	------------

The one **fórmula assinada** in this **tableau** has **operador principal** $\rightarrow$ and sign $\mathbb{F}$, so we apply the $\rightarrow \mathbb{F}$ rule to it to obtain:

1.	$\mathbb{F} (\neg \varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \checkmark$	Assumption
2.	$\mathbb{T} \neg \varphi \vee \psi$	$\rightarrow \mathbb{F} 1$
3.	$\mathbb{F} (\varphi \rightarrow \psi)$	$\rightarrow \mathbb{F} 1$

We now have a choice as to whether to apply $\vee \mathbb{T}$ to line 2 or $\rightarrow \mathbb{F}$ to line 3. It actually doesn't matter which order we pick, as long as each **fórmula assinada** has its corresponding rule applied in every branch. So let's pick the first one. The $\vee \mathbb{T}$ rule allows the **tableau** to branch, and the two conclusions of the rule will be the new **fórmulas assinadas** added to the two new branches. This results in:

1.	$\mathbb{F} (\neg \varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \checkmark$	Assumption
2.	$\mathbb{T} \neg \varphi \vee \psi \checkmark$	$\rightarrow \mathbb{F} 1$
3.	$\mathbb{F} (\varphi \rightarrow \psi)$	$\rightarrow \mathbb{F} 1$
4.	$\begin{array}{cc} & \wedge \\ \mathbb{T} \neg \varphi & \mathbb{T} \psi \end{array}$	$\vee \mathbb{T} 2$

We have not applied the $\rightarrow \mathbb{F}$ rule to line 3 yet: let's do that now. To save time, we apply it to both branches. Recall that we write a checkmark next to a **fórmula assinada** only if we have applied the corresponding rule in every open branch. So it's a good idea to apply a rule at the end of every branch that contains the **fórmula assinada** the rule applies to. That way we won't have to return to that **fórmula assinada** lower down in the various branches.

1.	$\mathbb{F}(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \checkmark$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\neg\varphi \vee \psi \checkmark$	$\rightarrow\mathbb{F} 1$
3.	$\mathbb{F}(\varphi \rightarrow \psi) \checkmark$	$\rightarrow\mathbb{F} 1$
$\swarrow \quad \searrow$		
4.	$\mathbb{T}\neg\varphi \quad \mathbb{T}\psi$	$\vee\mathbb{T} 2$
5.	$\mathbb{T}\varphi \quad \mathbb{T}\varphi$	$\rightarrow\mathbb{F} 3$
6.	$\mathbb{F}\psi \quad \mathbb{F}\psi$	$\rightarrow\mathbb{F} 3$
	$\otimes$	

The right branch is now closed. On the left branch, we can still apply the $\neg\mathbb{T}$ rule to line 4. This results in $\mathbb{F}\varphi$ and closes the left branch:

1.	$\mathbb{F}(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \checkmark$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\neg\varphi \vee \psi \checkmark$	$\rightarrow\mathbb{F} 1$
3.	$\mathbb{F}(\varphi \rightarrow \psi) \checkmark$	$\rightarrow\mathbb{F} 1$
$\swarrow \quad \searrow$		
4.	$\mathbb{T}\neg\varphi \quad \mathbb{T}\psi$	$\vee\mathbb{T} 2$
5.	$\mathbb{T}\varphi \quad \mathbb{T}\varphi$	$\rightarrow\mathbb{F} 3$
6.	$\mathbb{F}\psi \quad \mathbb{F}\psi$	$\rightarrow\mathbb{F} 3$
7.	$\mathbb{F}\varphi \quad \otimes$	$\neg\mathbb{T} 4$
	$\otimes$	

Exemplo 5.6. We can give **tableaux** for any number of **fórmulas assinadas** as assumptions. Often it is also necessary to apply more than one rule that allows branching; and in general a **tableau** can have any number of branches. For instance, consider a **tableau** for $\{\mathbb{T}\varphi \vee (\psi \wedge \chi), \mathbb{F}(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)\}$. We start by applying the $\vee\mathbb{T}$ to the first assumption:

1.	$\mathbb{T}\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \checkmark$	Assumption
2.	$\mathbb{F}(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \checkmark$	Assumption
$\swarrow \quad \searrow$		
3.	$\mathbb{T}\varphi \quad \mathbb{T}\psi \wedge \chi$	$\vee\mathbb{T} 1$

Now we can apply the $\wedge\mathbb{F}$ rule to line 2. We do this on both branches simultaneously, and can therefore check off line 2:

1.	$\mathbb{T}\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \checkmark$	Assumption
2.	$\mathbb{F}(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \checkmark$	Assumption
$\swarrow \quad \searrow$		
3.	$\mathbb{T}\varphi \quad \mathbb{T}\psi \wedge \chi$	$\vee\mathbb{T} 1$
$\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$		
4.	$\mathbb{F}\varphi \vee \psi \quad \mathbb{F}\varphi \vee \chi \quad \mathbb{F}\varphi \vee \psi \quad \mathbb{F}\varphi \vee \chi$	$\wedge\mathbb{F} 2$

Now we can apply $\vee\mathbb{F}$ to all the branches containing $\varphi \vee \psi$:

1.	$\mathsf{T} \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \checkmark$	Assumption
2.	$\mathsf{F} (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \checkmark$	Assumption
3.	$\mathsf{T} \varphi$ $\mathsf{T} \psi \wedge \chi$	$\vee \mathsf{T} 1$
4.	$\mathsf{F} \varphi \vee \psi \checkmark$ $\mathsf{F} \varphi \vee \chi$ $\mathsf{F} \varphi \vee \psi \checkmark$ $\mathsf{F} \varphi \vee \chi$	$\wedge \mathsf{F} 2$
5.	$\mathsf{F} \varphi$ $\mathsf{F} \varphi$	$\vee \mathsf{F} 4$
6.	$\mathsf{F} \psi$ $\mathsf{F} \psi$	$\vee \mathsf{F} 4$
	$\otimes$	

The leftmost branch is now closed. Let's now apply $\vee \mathsf{F}$ to $\varphi \vee \chi$:

1.	$\mathsf{T} \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \checkmark$	Assumption
2.	$\mathsf{F} (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \checkmark$	Assumption
3.	$\mathsf{T} \varphi$ $\mathsf{T} \psi \wedge \chi$	$\vee \mathsf{T} 1$
4.	$\mathsf{F} \varphi \vee \psi \checkmark$ $\mathsf{F} \varphi \vee \chi \checkmark$ $\mathsf{F} \varphi \vee \psi \checkmark$ $\mathsf{F} \varphi \vee \chi \checkmark$	$\wedge \mathsf{F} 2$
5.	$\mathsf{F} \varphi$ $\mathsf{F} \varphi$	$\vee \mathsf{F} 4$
6.	$\mathsf{F} \psi$ $\mathsf{F} \psi$	$\vee \mathsf{F} 4$
7.	$\otimes$ $\mathsf{F} \varphi$	$\vee \mathsf{F} 4$
8.	$\mathsf{F} \chi$ $\mathsf{F} \chi$	$\vee \mathsf{F} 4$
	$\otimes$	

Note that we moved the result of applying $\vee \mathsf{F}$ a second time below for clarity. In this instance it would not have been needed, since the justifications would have been the same.

Two branches remain open, and $\mathsf{T} \psi \wedge \chi$ on line 3 remains unchecked. We apply $\wedge \mathsf{T}$ to it to obtain a closed **tableau**:

1.	$\mathsf{T} \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \checkmark$	Assumption
2.	$\mathsf{F} (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \checkmark$	Assumption
3.	$\mathsf{T} \varphi$ $\mathsf{T} \psi \wedge \chi \checkmark$	$\vee \mathsf{T} 1$
4.	$\mathsf{F} \varphi \vee \psi \checkmark$ $\mathsf{F} \varphi \vee \chi \checkmark$ $\mathsf{F} \varphi \vee \psi \checkmark$ $\mathsf{F} \varphi \vee \chi \checkmark$	$\wedge \mathsf{F} 2$
5.	$\mathsf{F} \varphi$ $\mathsf{F} \varphi$	$\vee \mathsf{F} 4$
6.	$\mathsf{F} \psi$ $\mathsf{F} \chi$	$\vee \mathsf{F} 4$
7.	$\otimes$ $\otimes$	
8.	$\mathsf{T} \psi$ $\mathsf{T} \chi$	$\wedge \mathsf{T} 3$
	$\mathsf{T} \psi$ $\mathsf{T} \chi$	$\wedge \mathsf{T} 3$
	$\otimes$	

For comparison, here's a closed **tableau** for the same set of assumptions in which the rules are applied in a different order:

1.	$\mathbb{T} \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \checkmark$	Assumption
2.	$\mathbb{F} (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \checkmark$	Assumption
		
3.	$\mathbb{F} \varphi \vee \psi \checkmark$	$\wedge \mathbb{F} 2$
4.	$\mathbb{F} \varphi$	$\vee \mathbb{F} 3$
5.	$\mathbb{F} \psi$	$\vee \mathbb{F} 3$
		
6.	$\mathbb{T} \varphi$	$\vee \mathbb{T} 1$
7.	$\otimes$	$\wedge \mathbb{T} 6$
8.	$\mathbb{T} \psi$	$\wedge \mathbb{T} 6$
		
	$\mathbb{T} \chi$	
	$\otimes$	

Problema 5.1. Give closed **tableaux** of the following:

1. $\mathbb{T} \varphi \wedge (\psi \wedge \chi), \mathbb{F} (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
2. $\mathbb{T} \varphi \vee (\psi \vee \chi), \mathbb{F} (\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
3. $\mathbb{T} \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \mathbb{F} \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$.
4. $\mathbb{T} \varphi, \mathbb{F} \neg \neg \varphi$.

Problema 5.2. Give closed **tableaux** of the following:

1. $\mathbb{T} (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi, \mathbb{F} \varphi \rightarrow \chi$.
2. $\mathbb{T} (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi), \mathbb{F} (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$.
3. $\mathbb{F} \neg(\varphi \wedge \neg \varphi)$.
4. $\mathbb{T} \psi \rightarrow \varphi, \mathbb{F} \neg \varphi \rightarrow \neg \psi$.
5. $\mathbb{F} (\varphi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow \neg \varphi$.
6. $\mathbb{F} \neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg \psi$.
7. $\mathbb{T} \varphi \rightarrow \chi, \mathbb{F} \neg(\varphi \wedge \neg \chi)$.
8. $\mathbb{T} \varphi \wedge \neg \chi, \mathbb{F} \neg(\varphi \rightarrow \chi)$.
9. $\mathbb{T} \varphi \vee \psi, \neg \psi, \mathbb{F} \varphi$.
10. $\mathbb{T} \neg \varphi \vee \neg \psi, \mathbb{F} \neg(\varphi \wedge \psi)$.
11. $\mathbb{F} (\neg \varphi \wedge \neg \psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$.
12. $\mathbb{F} \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg \varphi \wedge \neg \psi)$.

Problema 5.3. Give closed **tableaux** of the following:

1. $\mathbb{T} \neg(\varphi \rightarrow \psi), \mathbb{F} \varphi$.

2. $\mathbb{T} \neg(\varphi \wedge \psi), \mathbb{F} \neg\varphi \vee \neg\psi$.
3. $\mathbb{T} \varphi \rightarrow \psi, \mathbb{F} \neg\varphi \vee \psi$.
4. $\mathbb{F} \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.
5. $\mathbb{T} \varphi \rightarrow \psi, \mathbb{T} \neg\varphi \rightarrow \psi, \mathbb{F} \psi$.
6. $\mathbb{T}(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi, \mathbb{F}(\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$.
7. $\mathbb{T}(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi, \mathbb{F} \varphi$.
8. $\mathbb{F}(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$.

-NoValue-

5.5 Proof-Theoretic Notions

pl:tab:ptn:
sec

This section collects the definitions of the provability relation and consistency for tableaux.

Just as we've defined a number of important semantic notions (validity, entailment, satisfiability), we now define corresponding *proof-theoretic notions*. These are not defined by appeal to satisfaction of **sentenças** in **estruturas**, but by appeal to the existence of certain closed **tableaux**. It was an important discovery that these notions coincide. That they do is the content of the *soundness* and *completeness theorems*.

explanation

Definição 5.7 (Theorems). A **sentença** φ is a *theorem* if there is a closed **tableau** for $\mathbb{F} \varphi$. We write $\vdash \varphi$ if φ is a theorem and $\nvdash \varphi$ if it is not.

Definição 5.8 (Derivabilidade). A **sentença** φ is *derivável* from a set of **sentenças** Γ , $\Gamma \vdash \varphi$ iff there is a finite set $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$ and a closed **tableau** for the set

$$\{\mathbb{F} \varphi, \mathbb{T} \psi_1, \dots, \mathbb{T} \psi_n\}.$$

If φ is not *derivável* from Γ we write $\Gamma \nvdash \varphi$.

Definição 5.9 (Consistency). A set of **sentenças** Γ is *inconsistent* iff there is a finite set $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$ and a closed **tableau** for the set

$$\{\mathbb{T} \psi_1, \dots, \mathbb{T} \psi_n\}.$$

If Γ is not inconsistent, we say it is *consistent*.

pl:tab:ptn:
prop:reflexivity

Proposição 5.10 (Reflexivity). If $\varphi \in \Gamma$, then $\Gamma \vdash \varphi$.

Prova. If $\varphi \in \Gamma$, $\{\varphi\}$ is a finite subset of Γ and the **tableau**

1. $\mathbb{F} \varphi$ Assumption
 2. $\mathbb{T} \varphi$ Assumption
- $$\otimes$$

is closed. □

Proposição 5.11 (Monotonicity). *If $\Gamma \subseteq \Delta$ and $\Gamma \vdash \varphi$, then $\Delta \vdash \varphi$.*

*pl:tab:ptn:
prop:monotonicity*

Prova. Any finite subset of Γ is also a finite subset of Δ . □

Proposição 5.12 (Transitivity). *If $\Gamma \vdash \varphi$ and $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, then $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.*

*pl:tab:ptn:
prop:transitivity*

Prova. If $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, then there is a finite subset $\Delta_0 = \{\chi_1, \dots, \chi_n\} \subseteq \Delta$ such that

$$\{\mathbb{F} \psi, \mathbb{T} \varphi, \mathbb{T} \chi_1, \dots, \mathbb{T} \chi_n\}$$

has a closed **tableau**. If $\Gamma \vdash \varphi$ then there are $\theta_1, \dots, \theta_m$ such that

$$\{\mathbb{F} \varphi, \mathbb{T} \theta_1, \dots, \mathbb{T} \theta_m\}$$

has a closed **tableau**.

Now consider the **tableau** with assumptions

$$\mathbb{F} \psi, \mathbb{T} \chi_1, \dots, \mathbb{T} \chi_n, \mathbb{T} \theta_1, \dots, \mathbb{T} \theta_m.$$

Apply the Cut rule on φ . This generates two branches, one has $\mathbb{T} \varphi$ in it, the other $\mathbb{F} \varphi$. Thus, on the one branch, all of

$$\{\mathbb{F} \psi, \mathbb{T} \varphi, \mathbb{T} \chi_1, \dots, \mathbb{T} \chi_n\}$$

are available. Since there is a closed **tableau** for these assumptions, we can attach it to that branch; every branch through $\mathbb{T} \varphi$ closes. On the other branch, all of

$$\{\mathbb{F} \varphi, \mathbb{T} \theta_1, \dots, \mathbb{T} \theta_m\}$$

are available, so we can also complete the other side to obtain a closed **tableau**. This shows $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$. □

Note that this means that in particular if $\Gamma \vdash \varphi$ and $\varphi \vdash \psi$, then $\Gamma \vdash \psi$. It follows also that if $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ and $\Gamma \vdash \varphi_i$ for each i , then $\Gamma \vdash \psi$.

Proposição 5.13. *Γ is inconsistent iff $\Gamma \vdash \varphi$ for every **sentença** φ .*

*pl:tab:ptn:
prop:incons*

Prova. Exercise. □

Problema 5.4. Prove **Proposição 5.13**

pl:tab:ptn:
prop:proves-compact

Proposição 5.14 (Compactness).

1. If $\Gamma \vdash \varphi$ then there is a finite subset $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ such that $\Gamma_0 \vdash \varphi$.
2. If every finite subset of Γ is consistent, then Γ is consistent.

Prova. 1. If $\Gamma \vdash \varphi$, then there is a finite subset $\Gamma_0 = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ and a closed **tableau** for

$$\{\mathbb{F} \varphi, \mathbb{T} \psi_1, \dots, \mathbb{T} \psi_n\}$$

This **tableau** also shows $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

2. If Γ is inconsistent, then for some finite subset $\Gamma_0 = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ there is a closed **tableau** for

$$\{\mathbb{T} \psi_1, \dots, \mathbb{T} \psi_n\}$$

This closed **tableau** shows that Γ_0 is inconsistent. □

-NoValue-

5.6 Derivabilidade and Consistency

pl:tab:prv:
sec

We will now establish a number of properties of the **derivabilidade** relation. They are independently interesting, but each will play a role in the proof of the completeness theorem.

pl:tab:prv:
prop:provability-contr

Proposição 5.15. *If $\Gamma \vdash \varphi$ and $\Gamma \cup \{\varphi\}$ is inconsistent, then Γ is inconsistent.*

Prova. There are finite $\Gamma_0 = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ and $\Gamma_1 = \{\chi_1, \dots, \chi_m\} \subseteq \Gamma$ such that

$$\begin{aligned} &\{\mathbb{F} \varphi, \mathbb{T} \psi_1, \dots, \mathbb{T} \psi_n\} \\ &\{\mathbb{T} \varphi, \mathbb{T} \chi_1, \dots, \mathbb{T} \chi_m\} \end{aligned}$$

have closed **tableaux**. Using the Cut rule on φ we can combine these into a single closed **tableau** that shows $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ is inconsistent. Since $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ and $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \subseteq \Gamma$, hence Γ is inconsistent. □

pl:tab:prv:
prop:prov-incons

Proposição 5.16. *$\Gamma \vdash \varphi$ iff $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ is inconsistent.*

Prova. First suppose $\Gamma \vdash \varphi$, O.s., there is a closed **tableau** for

$$\{\mathbb{F} \varphi, \mathbb{T} \psi_1, \dots, \mathbb{T} \psi_n\}$$

Using the $\neg \mathbb{T}$ rule, this can be turned into a closed **tableau** for

$$\{\mathbb{T} \neg \varphi, \mathbb{T} \psi_1, \dots, \mathbb{T} \psi_n\}.$$

On the other hand, if there is a closed **tableau** for the latter, we can turn it into a closed **tableau** of the former by removing every formula that results from $\neg\mathbb{T}$ applied to the first assumption $\mathbb{T}\neg\varphi$ as well as that assumption, and adding the assumption $\mathbb{F}\varphi$. For if a branch was closed before because it contained the conclusion of $\neg\mathbb{T}$ applied to $\mathbb{T}\neg\varphi$, O.s., $\mathbb{F}\varphi$, the corresponding branch in the new **tableau** is also closed. If a branch in the old tableau was closed because it contained the assumption $\mathbb{T}\neg\varphi$ as well as $\mathbb{F}\neg\varphi$ we can turn it into a closed branch by applying $\neg\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}\neg\varphi$ to obtain $\mathbb{T}\varphi$. This closes the branch since we added $\mathbb{F}\varphi$ as an assumption. $\square$

Problema 5.5. Prove that $\Gamma \vdash \neg\varphi$ iff $\Gamma \cup \{\varphi\}$ is inconsistent.

Proposição 5.17. *If $\Gamma \vdash \varphi$ and $\neg\varphi \in \Gamma$, then Γ is inconsistent.*

*pl:tab:prv:
prop:explicit-inc*

Prova. Suppose $\Gamma \vdash \varphi$ and $\neg\varphi \in \Gamma$. Then there are $\psi_1, \dots, \psi_n \in \Gamma$ such that

$$\{\mathbb{F}\varphi, \mathbb{T}\psi_1, \dots, \mathbb{T}\psi_n\}$$

has a closed tableau. Replace the assumption $\mathbb{F}\varphi$ by $\mathbb{T}\neg\varphi$, and insert the conclusion of $\neg\mathbb{T}$ applied to $\mathbb{F}\varphi$ after the assumptions. Any **sentença** in the **tableau** justified by appeal to line 1 in the old **tableau** is now justified by appeal to line $n+1$. So if the old **tableau** was closed, the new one is. It shows that Γ is inconsistent, since all assumptions are in Γ . $\square$

Proposição 5.18. *If $\Gamma \cup \{\varphi\}$ and $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ are both inconsistent, then Γ is inconsistent.*

*pl:tab:prv:
prop:provability-exhaustive*

Prova. If there are $\psi_1, \dots, \psi_n \in \Gamma$ and $\chi_1, \dots, \chi_m \in \Gamma$ such that

$$\{\mathbb{T}\varphi, \mathbb{T}\psi_1, \dots, \mathbb{T}\psi_n\} \text{ and } \{\mathbb{T}\neg\varphi, \mathbb{T}\chi_1, \dots, \mathbb{T}\chi_m\}$$

both have closed **tableaux**, we can construct a single, combined **tableau** that shows that Γ is inconsistent by using as assumptions $\mathbb{T}\psi_1, \dots, \mathbb{T}\psi_n$ together with $\mathbb{T}\chi_1, \dots, \mathbb{T}\chi_m$, followed by an application of the Cut rule. This yields two branches, one starting with $\mathbb{T}\varphi$, the other with $\mathbb{F}\varphi$.

On the left left side, add the part of the first **tableau** below its assumptions. Here, every rule application is still correct, since each of the assumptions of the first **tableau**, including $\mathbb{T}\varphi$, is available. Thus, every branch below $\mathbb{T}\varphi$ closes.

On the right side, add the part of the second **tableau** below its assumption, with the results of any applications of $\neg\mathbb{T}$ to $\mathbb{T}\neg\varphi$ removed. The conclusion of $\neg\mathbb{T}$ to $\mathbb{T}\neg\varphi$ is $\mathbb{F}\varphi$, which is nevertheless available, as it is the conclusion of the Cut rule on the right side of the combined **tableau**.

If a branch in the second tableau was closed because it contained the assumption $\mathbb{T}\neg\varphi$ (which no longer appears as an assumption in the combined **tableau**) as well as $\mathbb{F}\neg\varphi$, we can applying $\neg\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}\neg\varphi$ to obtain $\mathbb{T}\varphi$. Now the corresponding branch in the combined **tableau** also closes, because it contains

the right-hand conclusion of the Cut rule, $\mathbb{F}\varphi$. If a branch in the second **tableau** closed for any other reason, the corresponding branch in the combined **tableau** also closes, since any **fórmulas assinadas** other than $\mathbb{T}\neg\varphi$ occurring on the branch in the old, second **tableau** also occur on the corresponding branch in the combined **tableau**. $\square$

-NoValue-

5.7 Derivabilidade and the Propositional Connectives

We establish that the **derivabilidade** relation $\vdash$ of tableaux is strong enough to establish some basic facts involving the propositional connectives, such as that $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ and $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$ (modus ponens). These facts are needed for the proof of the completeness theorem. explanation

Proposição 5.19.

1. Both $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ and $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$.
2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

Prova. 1. Both $\{\mathbb{F}\varphi, \mathbb{T}\varphi \wedge \psi\}$ and $\{\mathbb{F}\psi, \mathbb{T}\varphi \wedge \psi\}$ have closed **tableaux**

1.	$\mathbb{F}\varphi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\varphi \wedge \psi$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\varphi$	$\wedge\mathbb{T} 2$
4.	$\mathbb{T}\psi$	$\wedge\mathbb{T} 2$
	$\otimes$	

1.	$\mathbb{F}\psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\varphi \wedge \psi$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\varphi$	$\wedge\mathbb{T} 2$
4.	$\mathbb{T}\psi$	$\wedge\mathbb{T} 2$
	$\otimes$	

2. Here is a closed **tableau** for $\{\mathbb{T}\varphi, \mathbb{T}\psi, \mathbb{F}\varphi \wedge \psi\}$:

1.	$\mathbb{F}\varphi \wedge \psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\varphi$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\psi$	Assumption
4.	$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \mathbb{F}\varphi & \mathbb{F}\psi \end{array}$	$\wedge\mathbb{F} 1$
	$\otimes \quad \otimes$	

Proposição 5.20.

*pl:tab:ppr:
prop:provability-lor*

1. $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi\}$ is inconsistent.
2. Both $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ and $\psi \vdash \varphi \vee \psi$.

Prova. 1. We give a closed **tableau** of $\{\mathbb{T}\varphi \vee \psi, \mathbb{T}\neg\varphi, \mathbb{T}\neg\psi\}$:

1.	$\mathbb{T}\varphi \vee \psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\neg\varphi$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\neg\psi$	Assumption
4.	$\mathbb{F}\varphi$	$\neg\mathbb{T} 2$
5.	$\mathbb{F}\psi$	$\neg\mathbb{T} 3$
		
6.	$\mathbb{T}\varphi$ $\mathbb{T}\psi$	$\vee\mathbb{T} 1$
	$\otimes$ $\otimes$	

2. Both $\{\mathbb{F}\varphi \vee \psi, \mathbb{T}\varphi\}$ and $\{\mathbb{F}\varphi \vee \psi, \mathbb{T}\psi\}$ have closed **tableaux**:

1.	$\mathbb{F}\varphi \vee \psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\varphi$	Assumption
3.	$\mathbb{F}\varphi$	$\vee\mathbb{F} 1$
4.	$\mathbb{F}\psi$	$\vee\mathbb{F} 1$
	$\otimes$	

1.	$\mathbb{F}\varphi \vee \psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\psi$	Assumption
3.	$\mathbb{F}\varphi$	$\vee\mathbb{F} 1$
4.	$\mathbb{F}\psi$	$\vee\mathbb{F} 1$
	$\otimes$	

Proposição 5.21.

*pl:tab:ppr:
prop:provability-lif
pl:tab:ppr:
prop:provability-lif-left
pl:tab:ppr:
prop:provability-lif-right*

1. $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$.
2. Both $\neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ and $\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Prova. 1. $\{\mathbb{F}\psi, \mathbb{T}\varphi \rightarrow \psi, \mathbb{T}\varphi\}$ has a closed **tableau**:

1.	$\mathbb{F}\psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T}\varphi \rightarrow \psi$	Assumption
3.	$\mathbb{T}\varphi$	Assumption
		
4.	$\mathbb{F}\varphi$ $\mathbb{T}\psi$	$\rightarrow\mathbb{T} 2$
	$\otimes$ $\otimes$	

2. Both $\{\mathbb{F} \varphi \rightarrow \psi, \mathbb{T} \neg \varphi\}$ and $\{\mathbb{F} \varphi \rightarrow \psi, \mathbb{T} \psi\}$ have closed **tableaux**:

1.	$\mathbb{F} \varphi \rightarrow \psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T} \neg \varphi$	Assumption
3.	$\mathbb{T} \varphi$	$\rightarrow \mathbb{F} 1$
4.	$\mathbb{F} \psi$	$\rightarrow \mathbb{F} 1$
5.	$\mathbb{F} \varphi$	$\neg \mathbb{T} 2$
	$\otimes$	

1.	$\mathbb{F} \varphi \rightarrow \psi$	Assumption
2.	$\mathbb{T} \psi$	Assumption
3.	$\mathbb{T} \varphi$	$\rightarrow \mathbb{F} 1$
4.	$\mathbb{F} \psi$	$\rightarrow \mathbb{F} 1$
	$\otimes$	

-NoValue-

5.8 Soundness

pl:tab:sou:
sec A **derivação** system, such as tableaux, is *sound* if it cannot **deriva** things that explanation do not actually hold. Soundness is thus a kind of guaranteed safety property for **derivação** systems. Depending on which proof theoretic property is in question, we would like to know for instance, that

1. every **derivável** φ is a tautology;
2. if a **sentença** is **derivável** from some others, it is also a consequence of them;
3. if a set of **sentenças** is inconsistent, it is unsatisfiable.

These are important properties of a **derivação** system. If any of them do not hold, the **derivação** system is deficient—it would **deriva** too much. Consequently, establishing the soundness of a **derivação** system is of the utmost importance.

Because all these proof-theoretic properties are defined via closed **tableaux** of some kind or other, proving (1)–(3) above requires proving something about the semantic properties of closed **tableaux**. We will first define what it means for a **fórmula assinada** to be satisfied in a structure, and then show that if a **tableau** is closed, no structure satisfies all its assumptions. (1)–(3) then follow as corollaries from this result.

Definição 5.22. A **valoração** $\mathbf{v}$ *satisfies* a **fórmula assinada** $\mathbb{T} \varphi$ iff $\mathbf{v} \models \varphi$, and it satisfies $\mathbb{F} \varphi$ iff $\mathbf{v} \not\models \varphi$. $\mathbf{v}$ satisfies a set of **fórmulas assinadas** Γ iff it satisfies every $S \varphi \in \Gamma$. Γ is *satisfiable* if there is a **valoração** that satisfies it, and *unsatisfiable* otherwise.

Teorema 5.23 (Soundness). *If Γ has a closed **tableau**, Γ is unsatisfiable.*

*pl:tab:sou:
thm:tableau-soundness*

Prova. Let's call a branch of a **tableau** satisfiable iff the set of **fórmulas assinadas** on it is satisfiable, and let's call a **tableau** satisfiable if it contains at least one satisfiable branch.

We show the following: Extending a satisfiable **tableau** by one of the rules of inference always results in a satisfiable **tableau**. This will prove the theorem: any closed **tableau** results by applying rules of inference to the **tableau** consisting only of assumptions from Γ . So if Γ were satisfiable, any **tableau** for it would be satisfiable. A closed **tableau**, however, is clearly not satisfiable: every branch contains both $\mathbb{T}\varphi$ and $\mathbb{F}\varphi$, and no structure can both satisfy and not satisfy φ .

Suppose we have a satisfiable **tableau**, O.s., a **tableau** with at least one satisfiable branch. Applying a rule of inference either adds **fórmulas assinadas** to a branch, or splits a branch in two. If the **tableau** has a satisfiable branch which is not extended by the rule application in question, it remains a satisfiable branch in the extended **tableau**, so the extended tableau is satisfiable. So we only have to consider the case where a rule is applied to a satisfiable branch.

Let Γ be the set of **fórmulas assinadas** on that branch, and let $S\varphi \in \Gamma$ be the **fórmula assinada** to which the rule is applied. If the rule does not result in a split branch, we have to show that the extended branch, O.s., Γ together with the conclusions of the rule, is still satisfiable. If the rule results in a split branch, we have to show that at least one of the two resulting branches is satisfiable.

First, we consider the possible inferences that do not result in a split branch.

1. The branch is expanded by applying $\neg\mathbb{T}$ to $\mathbb{T}\neg\psi \in \Gamma$. Then the extended branch contains the **fórmulas assinadas** $\Gamma \cup \{\mathbb{F}\psi\}$. Suppose $\mathbf{v} \models \Gamma$. In particular, $\mathbf{v} \models \neg\psi$. Thus, $\mathbf{v} \not\models \psi$, O.s., $\mathbf{v}$ satisfies $\mathbb{F}\psi$.
2. The branch is expanded by applying $\neg\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}\neg\psi \in \Gamma$: Exercise.
3. The branch is expanded by applying $\wedge\mathbb{T}$ to $\mathbb{T}\psi \wedge \chi \in \Gamma$, which results in two new **fórmulas assinadas** on the branch: $\mathbb{T}\psi$ and $\mathbb{T}\chi$. Suppose $\mathbf{v} \models \Gamma$, in particular $\mathbf{v} \models \psi \wedge \chi$. Then $\mathbf{v} \models \psi$ and $\mathbf{v} \models \chi$. This means that $\mathbf{v}$ satisfies both $\mathbb{T}\psi$ and $\mathbb{T}\chi$.
4. The branch is expanded by applying $\vee\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}\psi \vee \chi \in \Gamma$: Exercise.
5. The branch is expanded by applying $\rightarrow\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}\psi \rightarrow \chi \in \Gamma$: This results in two new **fórmulas assinadas** on the branch: $\mathbb{T}\psi$ and $\mathbb{F}\chi$. Suppose $\mathbf{v} \models \Gamma$, in particular $\mathbf{v} \models \psi \rightarrow \chi$. Then $\mathbf{v} \models \psi$ and $\mathbf{v} \not\models \chi$. This means that $\mathbf{v}$ satisfies both $\mathbb{T}\psi$ and $\mathbb{F}\chi$.

Now let's consider the possible inferences that result in a split branch.

1. The branch is expanded by applying $\wedge\mathbb{F}$ to $\mathbb{F}\psi \wedge \chi \in \Gamma$, which results in two branches, a left one continuing through $\mathbb{F}\psi$ and a right one through

$\mathbb{F}\chi$. Suppose $\mathbf{v} \models \Gamma$, in particular $\mathbf{v} \not\models \psi \wedge \chi$. Then $\mathbf{v} \not\models \psi$ or $\mathbf{v} \not\models \chi$. In the former case, $\mathbf{v}$ satisfies $\mathbb{F}\psi$, O.s., $\mathbf{v}$ satisfies the formulas on the left branch. In the latter, $\mathbf{v}$ satisfies $\mathbb{F}\chi$, O.s., $\mathbf{v}$ satisfies the formulas on the right branch.

2. The branch is expanded by applying $\vee\mathbb{T}$ to $\mathbb{T}\psi \vee \chi \in \Gamma$: Exercise.
3. The branch is expanded by applying $\rightarrow\mathbb{T}$ to $\mathbb{T}\psi \rightarrow \chi \in \Gamma$: Exercise.
4. The branch is expanded by Cut: This results in two branches, one containing $\mathbb{T}\psi$, the other containing $\mathbb{F}\psi$. Since $\mathbf{v} \models \Gamma$ and either $\mathbf{v} \models \psi$ or $\mathbf{v} \not\models \psi$, $\mathbf{v}$ satisfies either the left or the right branch. $\square$

Problema 5.6. Complete the proof of **Teorema 5.23**.

pl:tab:sou: cor:weak-soundness **Corolário 5.24.** *If $\vdash \varphi$ then φ is a tautology.*

pl:tab:sou: cor:entailment-soundness **Corolário 5.25.** *If $\Gamma \vdash \varphi$ then $\Gamma \models \varphi$.*

Prova. If $\Gamma \vdash \varphi$ then for some $\psi_1, \dots, \psi_n \in \Gamma$, $\{\mathbb{F}\varphi, \mathbb{T}\psi_1, \dots, \mathbb{T}\psi_n\}$ has a closed **tableau**. By **Teorema 5.23**, every **valoração** $\mathbf{v}$ either makes some ψ_i false or makes φ true. Hence, if $\mathbf{v} \models \Gamma$ then also $\mathbf{v} \models \varphi$. $\square$

pl:tab:sou: cor:consistency-soundness **Corolário 5.26.** *If Γ is satisfiable, then it is consistent.*

Prova. We prove the contrapositive. Suppose that Γ is not consistent. Then there are $\psi_1, \dots, \psi_n \in \Gamma$ and a closed **tableau** for $\{\mathbb{T}\psi_1, \dots, \mathbb{T}\psi_n\}$. By **Teorema 5.23**, there is no $\mathbf{v}$ such that $\mathbf{v} \models \psi_i$ for all $i = 1, \dots, n$. But then Γ is not satisfiable. $\square$

Capítulo 6

Axiomatic Derivações

No effort has been made yet to ensure that the material in this chapter respects various tags indicating which connectives and quantifiers are primitive or defined: all are assumed to be primitive, except $\leftrightarrow$ which is assumed to be defined. If the FOL tag is true, we produce a version with quantifiers, otherwise without.

-NoValue-

6.1 Rules and Derivações

explanation Axiomatic **derivações** are perhaps the simplest **derivação** system for logic. A **derivação** is just a sequence of **fórmulas**. To count as a **derivação**, every **fórmula** in the sequence must either be an instance of an axiom, or must follow from one or more **fórmulas** that precede it in the sequence by a rule of inference. A **derivação** *deriva* its last **fórmula**. pl:axd:rul:sec

Definição 6.1 (Derivabilidade). If Γ is a set of **fórmulas** of $\mathcal{L}$ then a **derivação** from Γ is a finite sequence $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ of **fórmulas** where for each $i \leq n$ one of the following holds:

1. $\varphi_i \in \Gamma$; or
2. φ_i is an axiom; or
3. φ_i follows from some φ_j (and φ_k) with $j < i$ (and $k < i$) by a rule of inference.

What counts as a correct **derivação** depends on which inference rules we allow (and of course what we take to be axioms). And an inference rule is an if-then statement that tells us that, under certain conditions, a step A_i in a **derivação** is a correct inference step.

Definição 6.2 (Rule of inference). A *rule of inference* gives a sufficient condition for what counts as a correct inference step in a *derivação* from Γ .

For instance, since any one-element sequence φ with $\varphi \in \Gamma$ trivially counts as a *derivação*, the following might be a very simple rule of inference:

If $\varphi \in \Gamma$, then φ is always a correct inference step in any *derivação* from Γ .

Similarly, if φ is one of the axioms, then φ by itself is a *derivação*, and so this is also a rule of inference:

If φ is an axiom, then φ is a correct inference step.

It gets more interesting if the rule of inference appeals to *fórmulas* that appear before the step considered. The following rule is called *modus ponens*:

If $\psi \rightarrow \varphi$ and ψ occur higher up in the *derivação*, then φ is a correct inference step.

If this is the only rule of inference, then our definition of *derivação* above amounts to this: $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ is a *derivação* iff for each $i \leq n$ one of the following holds:

1. $\varphi_i \in \Gamma$; or
2. φ_i is an axiom; or
3. for some $j < i$, φ_j is $\psi \rightarrow \varphi_i$, and for some $k < i$, φ_k is ψ .

The last clause says that φ_i follows from φ_j ($\psi \rightarrow \varphi_i$) and φ_k (ψ) by modus ponens. If we can go from 1 to n , and each time we find a *fórmula* φ_i that is either in Γ , an axiom, or which a rule of inference tells us that it is a correct inference step, then the entire sequence counts as a correct *derivação*.

Definição 6.3 (Derivabilidade). A *fórmula* φ is *derivável* from Γ , written $\Gamma \vdash \varphi$, if there is a *derivação* from Γ ending in φ .

Definição 6.4 (Theorems). A *fórmula* φ is a *theorem* if there is a *derivação* of φ from the empty set. We write $\vdash \varphi$ if φ is a theorem and $\nvdash \varphi$ if it is not.

-NoValue-

6.2 Axioms and Rules for the Propositional Connectives

Definição 6.5 (Axioms). The set of Ax_0 of *axioms* for the propositional connectives comprises all *fórmulas* of the following forms:

pl:axd:prp:
sec

$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$	(6.1)	pl:axd:prp: ax:land1
$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$	(6.2)	pl:axd:prp: ax:land2
$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$	(6.3)	pl:axd:prp: ax:land3
$\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	(6.4)	pl:axd:prp: ax:lor1
$\varphi \rightarrow (\psi \vee \varphi)$	(6.5)	pl:axd:prp: ax:lor2
$(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi))$	(6.6)	pl:axd:prp: ax:lor3
$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	(6.7)	pl:axd:prp: ax:lif1
$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$	(6.8)	pl:axd:prp: ax:lif2
$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$	(6.9)	pl:axd:prp: ax:lnot1
$\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	(6.10)	pl:axd:prp: ax:lnot2
$\top$	(6.11)	pl:axd:prp: ax:ltrue
$\perp \rightarrow \varphi$	(6.12)	pl:axd:prp: ax:lfalse1
$(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\varphi$	(6.13)	pl:axd:prp: ax:lfalse2
$\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	(6.14)	pl:axd:prp: ax:dne

Definição 6.6 (Modus ponens). If ψ and $\psi \rightarrow \varphi$ already occur in a *derivação*, then φ is a correct inference step.

We'll abbreviate the rule modus ponens as “MP.”

-NoValue-

6.3 Examples of Derivações

Exemplo 6.7. Suppose we want to prove $(\neg\theta \vee \alpha) \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha)$. Clearly, this is not an instance of any of our axioms, so we have to use the MP rule to *deriva* it. Our only rule is MP, which given φ and $\varphi \rightarrow \psi$ allows us to justify ψ . One strategy would be to use [Eq. \(6.6\)](#) with φ being $\neg\theta$, ψ being α , and χ being $\theta \rightarrow \alpha$. O.s., the instance

pl:axd:pro:
sec

$$(\neg\theta \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\neg\theta \vee \alpha) \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha))).$$

Why? Two applications of MP yield the last part, which is what we want. And we easily see that $\neg\theta \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha)$ is an instance of [Eq. \(6.10\)](#), and $\alpha \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha)$ is an instance of [Eq. \(6.7\)](#). So our *derivação* is:

1. $\neg\theta \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha)$ Eq. (6.10)
2. $(\neg\theta \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha)) \rightarrow$
 $((\alpha \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\neg\theta \vee \alpha) \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha)))$ Eq. (6.6)
3. $(\alpha \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\neg\theta \vee \alpha) \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha))$ 1, 2, MP
4. $\alpha \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha)$ Eq. (6.7)
5. $(\neg\theta \vee \alpha) \rightarrow (\theta \rightarrow \alpha)$ 3, 4, MP

Exemplo 6.8. Let's try to find a *derivação* of $\theta \rightarrow \theta$. It is not an instance of an axiom, so we have to use MP to *deriva* it. Eq. (6.7) is an axiom of the form $\varphi \rightarrow \psi$ to which we could apply MP. To be useful, of course, the ψ which MP would justify as a correct step in this case would have to be $\theta \rightarrow \theta$, since this is what we want to *deriva*. That means φ would also have to be θ , O.s., we might look at this instance of Eq. (6.7):

$$\theta \rightarrow (\theta \rightarrow \theta)$$

In order to apply MP, we would also need to justify the corresponding second premise, namely φ . But in our case, that would be θ , and we won't be able to *deriva* θ by itself. So we need a different strategy.

The other axiom involving just $\rightarrow$ is Eq. (6.8), O.s.,

$$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

We could get to the last nested conditional by applying MP twice. Again, that would mean that we want an instance of Eq. (6.8) where $\varphi \rightarrow \chi$ is $\theta \rightarrow \theta$, the *fórmula* we are aiming for. Then of course, φ and χ are both θ . How should we pick ψ so that both $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ and $\varphi \rightarrow \psi$, O.s., in our case $\theta \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)$ and $\theta \rightarrow \psi$, are also *derivável*? Well, the first of these is already an instance of Eq. (6.7), whatever we decide ψ to be. And $\theta \rightarrow \psi$ would be another instance of Eq. (6.7) if ψ were $(\theta \rightarrow \theta)$. So, our *derivação* is:

1. $\theta \rightarrow ((\theta \rightarrow \theta) \rightarrow \theta)$ Eq. (6.7)
2. $(\theta \rightarrow ((\theta \rightarrow \theta) \rightarrow \theta)) \rightarrow$
 $((\theta \rightarrow (\theta \rightarrow \theta)) \rightarrow (\theta \rightarrow \theta))$ Eq. (6.8)
3. $(\theta \rightarrow (\theta \rightarrow \theta)) \rightarrow (\theta \rightarrow \theta)$ 1, 2, MP
4. $\theta \rightarrow (\theta \rightarrow \theta)$ Eq. (6.7)
5. $\theta \rightarrow \theta$ 3, 4, MP

Exemplo 6.9. Sometimes we want to show that there is a *derivação* of some *fórmula* from some other *fórmulas* Γ . For instance, let's show that we can *deriva* $\varphi \rightarrow \chi$ from $\Gamma = \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\}$.

1. $\varphi \rightarrow \psi$ HYP
2. $\psi \rightarrow \chi$ HYP
3. $(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$ Eq. (6.7)
4. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ 2, 3, MP
5. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow$
 $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ Eq. (6.8)
6. $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ 4, 5, MP
7. $\varphi \rightarrow \chi$ 1, 6, MP

The lines labelled “HYP” (for “hypothesis”) indicate that the fórmula on that line is um membro of Γ .

Proposição 6.10. *If $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ and $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi$, then $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$*

pl:axd:pro:
prop:chain

Prova. Suppose $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ and $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi$. Then there is a derivação of $\varphi \rightarrow \psi$ from Γ ; and a derivação of $\psi \rightarrow \chi$ from Γ as well. Combine these into a single derivação by concatenating them. Now add lines 3–7 of the derivação in the preceding example. This is a derivação of $\varphi \rightarrow \chi$ —which is the last line of the new derivação—from Γ . Note that the justifications of lines 4 and 7 remain valid if the reference to line number 1 is replaced by reference to the last line of the derivação of $\varphi \rightarrow \psi$, and reference to line number 2 by reference to the last line of the derivação of $\psi \rightarrow \chi$. $\square$

Problema 6.1. Show that the following hold by exhibiting derivações from the axioms:

1. $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$
2. $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$
3. $\neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\varphi$

-NoValue-

6.4 Proof-Theoretic Notions

Just as we’ve defined a number of important semantic notions (tautology, entailment, satisfiability), we now define corresponding *proof-theoretic notions*. These are not defined by appeal to satisfaction of sentenças in estruturas, but by appeal to the derivabilidade or não derivabilidade of certain formulas. It was an important discovery that these notions coincide. That they do is the content of the *soundness* and *completeness theorems*.

pl:axd:ptn:
sec

Definição 6.11 (Derivabilidade). A fórmula φ is *derivável* from Γ , written $\Gamma \vdash \varphi$, if there is a derivação from Γ ending in φ .

Definição 6.12 (Theorems). A fórmula φ is a *theorem* if there is a derivação of φ from the empty set. We write $\vdash \varphi$ if φ is a theorem and $\nvdash \varphi$ if it is not.

Definição 6.13 (Consistency). A set Γ of fórmulas is *consistent* if and only if $\Gamma \nvdash \perp$; it is *inconsistent* otherwise.

Proposição 6.14 (Reflexivity). *If $\varphi \in \Gamma$, then $\Gamma \vdash \varphi$.*

pl:axd:ptn:
prop:reflexivity

Prova. The fórmula φ by itself is a derivação of φ from Γ . $\square$

Proposição 6.15 (Monotonicity). *If $\Gamma \subseteq \Delta$ and $\Gamma \vdash \varphi$, then $\Delta \vdash \varphi$.*

pl:axd:ptn:
prop:monotonicity

Prova. Any **derivação** of φ from Γ is also a **derivação** of φ from Δ . $\square$

pl:axd:ptn:
prop:transitivity

Proposição 6.16 (Transitivity). *If $\Gamma \vdash \varphi$ and $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$, then $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.*

Prova. Suppose $\{\varphi\} \cup \Delta \vdash \psi$. Then there is a **derivação** $\psi_1, \dots, \psi_l = \psi$ from $\{\varphi\} \cup \Delta$. Some of the steps in that **derivação** will be correct because of a rule which refers to a prior line $\psi_i = \varphi$. By hypothesis, there is a **derivação** of φ from Γ , O.s., a **derivação** $\varphi_1, \dots, \varphi_k = \varphi$ where every φ_i is an axiom, **um membro** of Γ , or correct by a rule of inference. Now consider the sequence

$$\varphi_1, \dots, \varphi_k = \varphi, \psi_1, \dots, \psi_l = \psi.$$

This is a correct **derivação** of ψ from $\Gamma \cup \Delta$ since every $B_i = \varphi$ is now justified by the same rule which justifies $\varphi_k = \varphi$. $\square$

Note that this means that in particular if $\Gamma \vdash \varphi$ and $\varphi \vdash \psi$, then $\Gamma \vdash \psi$. It follows also that if $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ and $\Gamma \vdash \varphi_i$ for each i , then $\Gamma \vdash \psi$.

pl:axd:ptn:
prop:incons

Proposição 6.17. *Γ is inconsistent iff $\Gamma \vdash \varphi$ for every φ .*

Prova. Exercise. $\square$

Problema 6.2. Prove **Proposição 6.17**.

pl:axd:ptn:
prop:proves-compact

Proposição 6.18 (Compactness).

1. *If $\Gamma \vdash \varphi$ then there is a finite subset $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ such that $\Gamma_0 \vdash \varphi$.*
2. *If every finite subset of Γ is consistent, then Γ is consistent.*

Prova. 1. If $\Gamma \vdash \varphi$, then there is a finite sequence of **fórmulas** $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ so that $\varphi \equiv \varphi_n$ and each φ_i is either a logical axiom, **um membro** of Γ or follows from previous **fórmulas** by modus ponens. Take Γ_0 to be those φ_i which are in Γ . Then the **derivação** is likewise a **derivação** from Γ_0 , and so $\Gamma_0 \vdash \varphi$.

2. This is the contrapositive of (1) for the special case $\varphi \equiv \perp$. $\square$

-NoValue-

6.5 The Deduction Theorem

pl:axd:ded:
sec

As we've seen, giving **derivações** in an axiomatic system is cumbersome, and **derivações** may be hard to find. Rather than actually write out long lists of **fórmulas**, it is generally easier to argue that such **derivações** exist, by making use of a few simple results. We've already established three such results: **Proposição 6.14** says we can always assert that $\Gamma \vdash \varphi$ when we know that $\varphi \in \Gamma$. **Proposição 6.15** says that if $\Gamma \vdash \varphi$ then also $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$. And **Proposição 6.16** implies that if $\Gamma \vdash \varphi$ and $\varphi \vdash \psi$, then $\Gamma \vdash \psi$. Here's another simple result, a "meta"-version of modus ponens:

Proposição 6.19. *If $\Gamma \vdash \varphi$ and $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, then $\Gamma \vdash \psi$.*

*pl:axd:ded:
prop:mp*

Prova. We have that $\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \vdash \psi$:

1. φ Hyp.
2. $\varphi \rightarrow \psi$ Hyp.
3. ψ 1, 2, MP

By **Proposição 6.16**, $\Gamma \vdash \psi$. □

The most important result we'll use in this context is the deduction theorem:

Teorema 6.20 (Deduction Theorem). *$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ if and only if $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.*

*pl:axd:ded:
thm:deduction-thm*

Prova. The “if” direction is immediate. If $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ then also $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ by **Proposição 6.15**. Also, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$ by **Proposição 6.14**. So, by **Proposição 6.19**, $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

For the “only if” direction, we proceed by induction on the length of the *derivação* of ψ from $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

For the induction basis, we prove the claim for every *derivação* of length 1. A *derivação* of ψ from $\Gamma \cup \{\varphi\}$ of length 1 consists of ψ by itself; and if it is correct ψ is either $\in \Gamma \cup \{\varphi\}$ or is an axiom. If $\psi \in \Gamma$ or is an axiom, then $\Gamma \vdash \psi$. We also have that $\Gamma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ by **Eq. (6.7)**, and **Proposição 6.19** gives $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. If $\psi \in \{\varphi\}$ then $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ because the last *sentença* $\varphi \rightarrow \psi$ is the same as $\varphi \rightarrow \varphi$, and we have *derivad* that in **Exemplo 6.8**.

For the inductive step, suppose a *derivação* of ψ from $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ends with a step ψ which is justified by modus ponens. (If it is not justified by modus ponens, $\psi \in \Gamma$, $\psi \equiv \varphi$, or ψ is an axiom, and the same reasoning as in the induction basis applies.) Then some previous steps in the *derivação* are $\chi \rightarrow \psi$ and χ , for some *fórmula* χ . O.s., $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \chi \rightarrow \psi$ and $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \chi$, and the respective *derivações* are shorter, so the inductive hypothesis applies to them. We thus have both:

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi); \\ \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi. \end{aligned}$$

But also

$$\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)),$$

by **Eq. (6.8)**, and two applications of **Proposição 6.19** give $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, as required. □

Notice how **Eq. (6.7)** and **Eq. (6.8)** were chosen precisely so that the Deduction Theorem would hold.

The following are some useful facts about *derivabilidade*, which we leave as exercises.

Proposição 6.21.

*pl:axd:ded:
prop:derivfacts*

- pl:axd:ded: 1. $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi));$
 derivfacts:a
 pl:axd:ded: 2. If $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ then $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ (Contraposition);
 derivfacts:b
 pl:axd:ded: 3. $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ (Ex Falso Quodlibet, Explosion);
 derivfacts:c
 pl:axd:ded: 4. $\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ (Double Negation Elimination);
 derivfacts:d
 pl:axd:ded: 5. If $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$ then $\Gamma \vdash \varphi$;
 derivfacts:e

Problema 6.3. Prove **Proposição 6.21**

-NoValue-

6.6 Derivabilidade and Consistency

pl:axd:prv: We will now establish a number of properties of the **derivabilidade** relation.
 sec They are independently interesting, but each will play a role in the proof of the completeness theorem.

pl:axd:prv: **Proposição 6.22.** If $\Gamma \vdash \varphi$ and $\Gamma \cup \{\varphi\}$ is inconsistent, then Γ is inconsis-
 prop:provability-contr tent.

Prova. If $\Gamma \cup \{\varphi\}$ is inconsistent, then $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \perp$. By **Proposição 6.14**, $\Gamma \vdash \psi$ for every $\psi \in \Gamma$. Since also $\Gamma \vdash \varphi$ by hypothesis, $\Gamma \vdash \psi$ for every $\psi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$. By **Proposição 6.16**, $\Gamma \vdash \perp$, O.s., Γ is inconsistent. $\square$

pl:axd:prv: **Proposição 6.23.** $\Gamma \vdash \varphi$ iff $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is inconsistent.
 prop:prov-incons

Prova. First suppose $\Gamma \vdash \varphi$. Then $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$ by **Proposição 6.15**. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ by **Proposição 6.14**. We also have $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$ by **Eq. (6.10)**. So by two applications of **Proposição 6.19**, we have $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$.

Now assume $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is inconsistent, O.s., $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$. By the deduction theorem, $\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \perp$. $\Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \neg\neg\varphi$ by **Eq. (6.13)**, so $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$ by **Proposição 6.19**. Since $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ (**Eq. (6.14)**), we have $\Gamma \vdash \varphi$ by **Proposição 6.19** again. $\square$

Problema 6.4. Prove that $\Gamma \vdash \neg\varphi$ iff $\Gamma \cup \{\varphi\}$ is inconsistent.

pl:axd:prv: **Proposição 6.24.** If $\Gamma \vdash \varphi$ and $\neg\varphi \in \Gamma$, then Γ is inconsistent.
 prop:explicit-inc

Prova. $\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$ by **Eq. (6.10)**. $\Gamma \vdash \perp$ by two applications of **Proposição 6.19**. $\square$

pl:axd:prv: **Proposição 6.25.** If $\Gamma \cup \{\varphi\}$ and $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ are both inconsistent, then Γ is
 prop:provability-exhaustive inconsistent.

Prova. Exercise. $\square$

Problema 6.5. Prove **Proposição 6.25**

-NoValue-

6.7 Derivabilidade and the Propositional Connectives

explanation We establish that the **derivabilidade** relation $\vdash$ of axiomatic deduction is strong enough to establish some basic facts involving the propositional connectives, such as that $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ and $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$ (modus ponens). These facts are needed for the proof of the completeness theorem. pl:axd:ppr:sec

Proposição 6.26.

1. Both $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ and $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$
2. $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$.

pl:axd:ppr:prop:provability-land
pl:axd:ppr:prop:provability-land-left
pl:axd:ppr:prop:provability-land-right

Prova. 1. From **Eq. (6.1)** and **Eq. (6.1)** by modus ponens.

2. From **Eq. (6.3)** by two applications of modus ponens. □

Proposição 6.27.

1. $\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ is inconsistent.
2. Both $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ and $\psi \vdash \varphi \vee \psi$.

pl:axd:ppr:prop:provability-lor

Prova. 1. From **Eq. (6.9)** we get $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \perp)$ and $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \perp)$. So by the deduction theorem, we have $\{\neg\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \perp$ and $\{\neg\psi\} \vdash \psi \rightarrow \perp$. From **Eq. (6.6)** we get $\{\neg\varphi, \neg\psi\} \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \perp$. By the deduction theorem, $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi\} \vdash \perp$.

2. From **Eq. (6.4)** and **Eq. (6.5)** by modus ponens. □

Proposição 6.28.

1. $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$.
2. Both $\neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ and $\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

pl:axd:ppr:prop:provability-lif
pl:axd:ppr:prop:provability-lif-left
pl:axd:ppr:prop:provability-lif-right

Prova. 1. We can **deriva**:

1. φ HYP
2. $\varphi \rightarrow \psi$ HYP
3. ψ 1, 2, MP

2. By **Eq. (6.10)** and **Eq. (6.7)** and the deduction theorem, respectively. □

-NoValue-

6.8 Soundness

pl:axd:sou:
sec A **derivação** system, such as axiomatic deduction, is *sound* if it cannot **deriva** explanation things that do not actually hold. Soundness is thus a kind of guaranteed safety property for **derivação** systems. Depending on which proof theoretic property is in question, we would like to know for instance, that

1. every **derivável** φ is valid;
2. if φ is **derivável** from some others Γ , it is also a consequence of them;
3. if a set of **fórmulas** Γ is inconsistent, it is unsatisfiable.

These are important properties of a **derivação** system. If any of them do not hold, the **derivação** system is deficient—it would **deriva** too much. Consequently, establishing the soundness of a **derivação** system is of the utmost importance.

Proposição 6.29. *If φ is an axiom, then $\mathbf{v} \models \varphi$ for each **valoração** $\mathbf{v}$.*

Prova. Do truth tables for each axiom to verify that they are tautologies. $\square$

pl:axd:sou:
thm:soundness **Teorema 6.30 (Soundness).** *If $\Gamma \vdash \varphi$ then $\Gamma \models \varphi$.*

Prova. By induction on the length of the **derivação** of φ from Γ . If there are no steps justified by inferences, then all **fórmulas** in the **derivação** are either instances of axioms or are in Γ . By the previous proposition, all the axioms are tautologies, and hence if φ is an axiom then $\Gamma \models \varphi$. If $\varphi \in \Gamma$, then trivially $\Gamma \models \varphi$.

If the last step of the **derivação** of φ is justified by modus ponens, then there are **fórmulas** ψ and $\psi \rightarrow \varphi$ in the **derivação**, and the induction hypothesis applies to the part of the **derivação** ending in those **fórmulas** (since they contain at least one fewer step justified by an inference). So, by induction hypothesis, $\Gamma \models \psi$ and $\Gamma \models \psi \rightarrow \varphi$. Then $\Gamma \models \varphi$ by **Teorema 1.21**.

pl:axd:sou:
cor:weak-soundness **Corolário 6.31.** *If $\vdash \varphi$, then φ is a tautology.*

pl:axd:sou:
cor:consistency-soundness **Corolário 6.32.** *If Γ is satisfiable, then it is consistent.*

Prova. We prove the contrapositive. Suppose that Γ is not consistent. Then $\Gamma \vdash \perp$, O.s., there is a **derivação** of $\perp$ from Γ . By **Teorema 6.30**, any **valoração** $\mathbf{v}$ that satisfies Γ must satisfy $\perp$. Since $\mathbf{v} \neq \perp$ for every **valoração** $\mathbf{v}$, no $\mathbf{v}$ can satisfy Γ , O.s., Γ is not satisfiable. $\square$

Capítulo 7

O Teorema da Completude

7.1 Introdução

O teorema da completude é um dos resultados mais fundamentais sobre lógica. Ele vem em duas formulações, cuja equivalência iremos provar. Em sua primeira formulação, ele diz algo fundamental sobre a relação entre consequência semântica e nosso sistema de **derivação**: se **a sentença** φ segue de algumas **sentenças** Γ , então também existe **a derivação** que estabelece $\Gamma \vdash \varphi$. Assim, o sistema de **derivação** é tão forte quanto pode possivelmente ser sem provar coisas que de fato não se seguem. pl:com:int:sec

Em sua segunda formulação, ele pode ser enunciado como um resultado de existência de modelo: todo conjunto consistente de **sentenças** é satisfatível. A consistência é uma noção da teoria da prova: ela diz que nosso sistema de **derivação** é incapaz de produzir certas **derivações**. Mas quem garante que, só porque não há **derivações** de um certo tipo a partir de Γ , está garantido que existe **valoração** $\mathbf{v}$ com $\mathbf{v} \models \Gamma$? Antes de o teorema da completude ser provado pela primeira vez — na verdade, antes de termos os sistemas de **derivação** que temos hoje — o grande matemático alemão David Hilbert defendia a visão de que a consistência das teorias matemáticas garante a existência dos objetos de que elas tratam. Ele colocou isso da seguinte forma em uma carta a Gottlob Frege:

Se os axiomas dados arbitrariamente não se contradizem uns aos outros com todas as suas consequências, então eles são verdadeiros e as coisas definidas pelos axiomas existem. Este é para mim o critério de verdade e existência.

Frege discordou veementemente. A segunda formulação do teorema da completude mostra que Hilbert estava certo pelo menos no sentido de que, se os axiomas são consistentes, então existe *alguma* **valoração** que os torna todos verdadeiros.

Estas não são as únicas razões pelas quais o teorema da completude — ou melhor, sua prova — é importante. Ele tem uma série de consequências im-

portantes, algumas das quais discutiremos separadamente. Por exemplo, como toda **derivação** que mostra $\Gamma \vdash \varphi$ é finita e, portanto, só pode usar uma quantidade finita das **sentenças** em Γ , segue do teorema da completude que, se φ é uma consequência de Γ , então já é uma consequência de um subconjunto finito de Γ . Isso é chamado de *compacidade*. Equivalentemente, se todo subconjunto finito de Γ é consistente, então o próprio Γ deve ser consistente.

Embora o teorema da compacidade decorra do teorema da completude pelo desvio através de **derivações**, também é possível usar a *prova do* teorema da completude para estabelecê-lo diretamente. Pois o que a prova faz é tomar um conjunto de **sentenças** com uma certa propriedade — a consistência — e construir a **estrutura** a partir desse conjunto que possui certas propriedades (neste caso, que ela satisfaz o conjunto). Quase exatamente a mesma construção pode ser usada para estabelecer a compacidade diretamente, partindo de conjuntos “finitamente satisfatíveis” de **sentenças** em vez de conjuntos consistentes.

7.2 Esboço da Prova

pl:com:out:
sec

A prova do teorema da completude é um pouco complexa e, em uma primeira leitura, é fácil se perder. Então, vamos esboçar a prova. O primeiro passo é uma mudança de perspectiva, que nos permite enxergar um caminho para uma prova. Quando a completude é pensada como “sempre que $\Gamma \models \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$ ”, pode ser difícil até mesmo ter uma ideia: pois, para mostrar que $\Gamma \vdash \varphi$, temos que encontrar a **derivação**, e não parece que a hipótese de que $\Gamma \models \varphi$ nos ajude nisso de alguma forma. Para alguns sistemas de prova, é possível construir diretamente a **derivação**, mas adotaremos uma abordagem um pouco diferente. A mudança de perspectiva necessária é esta: a completude também pode ser formulada como: “se Γ é consistente, então é satisfatível”. Talvez possamos usar a informação em Γ juntamente com a hipótese de que ela é consistente para construir a **valoração** que satisfaça toda **fórmula** em Γ . Afinal, sabemos que tipo de **valoração** estamos procurando: uma que seja como Γ a descreve!

Se Γ contém apenas **variáveis proposicionais**, é fácil construir um modelo para ele. Tudo o que temos a fazer é apresentar a **valoração** $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v} \models p$ para todo $p \in \Gamma$. Bem, faça $\mathbf{v}(p) = \mathbb{T}$ se e somente se $p \in \Gamma$.

Agora suponha que Γ contenha alguma **fórmula** $\neg\psi$, com ψ atômica. Poderíamos temer que a construção de $\mathbf{v}$ interfira na possibilidade de tornar $\neg\psi$ verdadeira. Mas é aqui que entra a consistência de Γ : se $\neg\psi \in \Gamma$, então $\psi \notin \Gamma$, caso contrário Γ seria inconsistente. E se $\psi \notin \Gamma$, então, de acordo com nossa construção de $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \not\models \psi$, logo $\mathbf{v} \models \neg\psi$. Até aqui, tudo bem.

E se Γ contiver fórmulas complexas, não atômicas? Digamos que ele contenha $\varphi \wedge \psi$. Para tornar isso verdadeiro, devemos proceder como se tanto φ quanto ψ estivessem em Γ . E se $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, então teremos que tornar pelo menos um deles verdadeiro, isto é, proceder como se um deles estivesse em Γ .

Isso sugere a seguinte ideia: adicionamos **fórmulas** adicionais a Γ de modo a (a) manter o conjunto resultante consistente e (b) garantir que, para toda **sentença** φ atômica possível, ou φ está no conjunto resultante, ou $\neg\varphi$ está, e

(c) tais que, sempre que $\varphi \wedge \psi$ está no conjunto, então tanto φ quanto ψ também estão; se $\varphi \vee \psi$ está no conjunto, pelo menos um dentre φ ou ψ também está, etc. Continuamos fazendo isso (potencialmente para sempre). Chame o conjunto de todas as **fórmulas** assim adicionadas de Γ^* . Então a nossa construção acima nos forneceria a **valoração** $\mathbf{v}$ para a qual poderíamos provar, por indução, que ela satisfaz todas as sentenças em Γ^* e, portanto, também todas as sentenças em Γ , já que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$. Acontece que garantir (a) e (b) é suficiente. Um conjunto de sentenças para o qual (b) vale é chamado de *completo*. Assim, nossa tarefa será estender o conjunto consistente Γ a um conjunto consistente e completo Γ^* .

Então, aqui está o que faremos. Primeiro investigamos as propriedades dos conjuntos consistentes **completos**; em particular, provamos que um conjunto consistente **completo** contém $\varphi \wedge \psi$ se e somente se contém tanto φ quanto ψ , contém $\varphi \vee \psi$ se e somente se contém pelo menos um deles, etc. (**Proposição 7.2**). Em seguida, tomaremos o conjunto consistente Γ e mostraremos que ele pode ser estendido a um conjunto consistente e **completo** Γ^* (**Lema 7.3**). Este conjunto Γ^* é o que usaremos para definir nossa **valoração** $\mathbf{v}(\Gamma^*)$. A valoração é determinada pelas **variáveis proposicionais** em Γ^* (**Definição 7.4**). Usaremos as propriedades dos conjuntos consistentes completos para mostrar que, de fato, $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$ (**Lema 7.5**) e, portanto, em particular, $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models \Gamma$.

7.3 Conjuntos Consistentes Completos de Sentenças

Definição 7.1 (Conjunto completo). Um conjunto Γ de **sentenças** é **completo** se e somente se, para qualquer **sentença** φ , ou $\varphi \in \Gamma$ ou $\neg\varphi \in \Gamma$.

pl:com:ccs:
sec
pl:com:ccs:
def:complete-set

explanation Conjuntos **completos** de sentenças não deixam questões sem resposta. Para qualquer **sentença** φ , Γ “diz” se φ é verdadeira ou falsa. A importância dos conjuntos **completos** estende-se para além da prova do teorema da completude. Uma teoria que é completa e axiomatizável, por exemplo, é sempre decidível.

explanation Conjuntos consistentes **completos** são importantes na prova de completude já que podemos garantir que todo conjunto consistente de **sentenças** Γ está contido em um conjunto consistente **completo** Γ^* . Um conjunto consistente **completo** contém, para cada **sentença** φ , ou φ ou sua negação $\neg\varphi$, mas não ambas. Isso é verdade em particular para variáveis proposicionais, de modo que, a partir de um conjunto consistente **completo**, podemos construir a **valoração** onde o valor de verdade atribuído às variáveis proposicionais é definida de acordo com quais **variáveis proposicionais** estão em Γ^* . Pode-se então mostrar que esta **valoração** torna verdadeiras todas as **sentenças** em Γ^* (e, portanto, também todas aquelas em Γ). A prova deste último fato requer que $\neg\varphi \in \Gamma^*$ se e somente se $\varphi \notin \Gamma^*$, $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma^*$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$ ou $\psi \in \Gamma^*$, etc.

No que se segue, usaremos com frequência, de modo tácito, as propriedades de reflexividade, monotonicidade e transitividade de $\vdash$ (ver **Seções 3.6, 4.5, 5.5 e 6.4**).

pl:com:ccs: prop:ccs **Proposição 7.2.** *Suponha que Γ seja completo e consistente. Então:*

- pl:com:ccs: prop:ccs-prov-in* 1. *Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\varphi \in \Gamma$.*
- pl:com:ccs: prop:ccs-and* 2. *$\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$.*
- pl:com:ccs: prop:ccs-or* 3. *$\varphi \vee \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.*
- pl:com:ccs: prop:ccs-if* 4. *$\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \notin \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.*

Prova. Suponhamos, para tudo o que se segue, que Γ seja completo e consistente.

1. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\varphi \in \Gamma$.

Suponha que $\Gamma \vdash \varphi$. Suponha, ao contrário, que $\varphi \notin \Gamma$. Como Γ é completo, $\neg\varphi \in \Gamma$. Por [Proposições 3.19, 4.17, 5.17 e 6.24](#), Γ é inconsistente. Isso contradiz a suposição de que Γ é consistente. Logo, não pode ser o caso que $\varphi \notin \Gamma$, de modo que $\varphi \in \Gamma$.

2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ se e somente se $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$:

Para a direção direta, suponha $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$. Então por [Proposições 3.21, 4.19, 5.19 e 6.26](#), item (1), $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$. Por (1), $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$, como requerido.

Para a direção reversa, sejam $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$. Por [Proposições 3.21, 4.19, 5.19 e 6.26](#), item (2), $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$. Por (1), $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$.

3. Primeiro mostramos que, se $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, então $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$. Suponha $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ mas $\varphi \notin \Gamma$ e $\psi \notin \Gamma$. Como Γ é completo, $\neg\varphi \in \Gamma$ e $\neg\psi \in \Gamma$. Por [Proposições 3.22, 4.20, 5.20 e 6.27](#), item (1), Γ é inconsistente, uma contradição. Logo, $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.

Para a direção reversa, suponha que $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$. Por [Proposições 3.22, 4.20, 5.20 e 6.27](#), item (2), $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$. Por (1), $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, como requerido.

4. Para a direção direta, suponha $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ e suponha, ao contrário, que $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \notin \Gamma$. Sob essas suposições, $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ e $\varphi \in \Gamma$. Por [Proposições 3.23, 4.21, 5.21 e 6.28](#), item (1), $\Gamma \vdash \psi$. Mas então, por (1), $\psi \in \Gamma$, contradizendo a suposição de que $\psi \notin \Gamma$.

Para a direção reversa, considere primeiro o caso em que $\varphi \notin \Gamma$. Como Γ é completo, $\neg\varphi \in \Gamma$. Por [Proposições 3.23, 4.21, 5.21 e 6.28](#), item (2), $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Novamente por (1), obtemos que $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$, como requerido.

Agora considere o caso em que $\psi \in \Gamma$. Por [Proposições 3.23, 4.21, 5.21 e 6.28](#), item (2) novamente, $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Por (1), $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$. $\square$

Problema 7.1. Complete a prova de [Proposição 7.2](#).

7.4 Lema de Lindenbaum

explanation Provamos agora um lema que mostra que qualquer conjunto consistente de **sentenças** está contido em algum conjunto de sentenças que não é apenas consistente, mas também **completo**. A prova funciona adicionando uma **sentença** de cada vez, garantindo a cada passo que o conjunto permanece consistente. Fazemos isso de modo que, para todo φ , ou φ ou $\neg\varphi$ seja adicionada em algum estágio. A união de todos os estágios dessa construção então contém ou φ ou sua negação $\neg\varphi$ e é, portanto, completa. Ela também é consistente, já que nos asseguramos, a cada estágio, de não introduzir uma inconsistência. pl:com:lin:sec

Lema 7.3 (Lema de Lindenbaum). *Todo conjunto consistente Γ em uma linguagem $\mathcal{L}$ pode ser estendido a um conjunto consistente **completo** Γ^* .* pl:com:lin:lem:lindenbaum

Prova. Seja Γ consistente. Sejam $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ uma enumeração de todas as **sentenças** de $\mathcal{L}$. Defina $\Gamma_0 = \Gamma$, e

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{se } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ é consistente;} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $\Gamma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$.

Cada Γ_n é consistente: Γ_0 é consistente por definição. Se $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$, isso é porque este último é consistente. Se não é, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$. Temos que verificar que $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ é consistente. Suponha que não seja. Então *ambos* $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ e $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ são inconsistentes. Isso significa que Γ_n seria inconsistente por **Proposições 3.20, 4.18, 5.18 e 6.25**, contrariando a hipótese de indução.

Para todo n e todo $i < n$, $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$. Isso segue por uma simples indução sobre n . Para $n = 0$, não há $i < 0$, de modo que a afirmação vale automaticamente. Para o passo indutivo, suponha que ela seja verdadeira para n . Mostramos que, se $i < n + 1$, então $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1}$. Temos $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ ou $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ por construção. Logo $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$. Se $i < n + 1$, então $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$ por hipótese indutiva (se $i < n$) ou pelo fato trivial de que $\Gamma_n \subseteq \Gamma_n$ (se $i = n$). Obtemos que $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1}$ por transitividade de $\subseteq$.

Disso segue que Γ^* é consistente. Eis o porquê: Seja $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$ finito. Cada $\psi \in \Gamma'$ também está em Γ_i para algum i . Seja n o maior destes. Como $\Gamma_i \subseteq \Gamma_n$ se $i \leq n$, todo $\psi \in \Gamma'$ também está em Γ_n , isto é, $\Gamma' \subseteq \Gamma_n$, e Γ_n é consistente. Assim, todo subconjunto finito $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$ é consistente. Por **Proposições 3.16, 4.14, 5.14 e 6.18**, Γ^* é consistente.

Toda **sentença** de $\text{Frm}(\mathcal{L})$ aparece na lista usada para definir Γ^* . Se $\varphi_n \notin \Gamma^*$, então isso é porque $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ era inconsistente. Mas então $\neg\varphi_n \in \Gamma^*$, de modo que Γ^* é **completo**. $\square$

7.5 Construção de um Modelo

explanation pl:com:mod:sec

Estamos agora prontos para definir a **avaliação** que torna verdadeiras todas as $\varphi \in \Gamma$. Para fazer isso, primeiro aplicamos o Lema de Lindenbaum: obtemos um $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ consistente completo. Deixamos as **variáveis proposicionais** em Γ^* determinarem $\mathbf{v}(\Gamma^*)$.

pl:com:mod: defn:termmodel **Definição 7.4.** Suponha que Γ^* seja um conjunto consistente completo de **fórmulas**. Então deixamos

$$\mathbf{v}(\Gamma^*)(p) = \begin{cases} \mathbb{T} & \text{se } p \in \Gamma^* \\ \mathbb{F} & \text{se } p \notin \Gamma^* \end{cases}$$

pl:com:mod: lem:truth **Lema 7.5 (Lema da Verdade).** $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$.

Prova. Provamos ambas as direções simultaneamente e por indução sobre φ .

1. $\varphi \equiv \perp$: $\mathbf{v}(\Gamma^*) \not\models \perp$ por definição de satisfação. Por outro lado, $\perp \notin \Gamma^*$ já que Γ^* é consistente.
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models \top$ por definição de satisfação. Por outro lado, $\top \in \Gamma^*$ já que Γ^* é consistente e **completo**, e $\Gamma^* \vdash \top$.
3. $\varphi \equiv p$: $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models p$ se e somente se $\mathbf{v}(\Gamma^*)(p) = \mathbb{T}$ (pela definição de satisfação) se e somente se $p \in \Gamma^*$ (pela construção de $\mathbf{v}(\Gamma^*)$).
4. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\mathbf{v}(\Gamma^*) \not\models \psi$ (por definição de satisfação). Por hipótese de indução, $\mathbf{v}(\Gamma^*) \not\models \psi$ se e somente se $\psi \notin \Gamma^*$. Como Γ^* é consistente e **completo**, $\psi \notin \Gamma^*$ se e somente se $\neg\psi \in \Gamma^*$.
5. $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$: $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se temos ambos $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models \psi$ e $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models \chi$ (por definição de satisfação) se e somente se $\psi \in \Gamma^*$ e $\chi \in \Gamma^*$ (pela hipótese de indução). Por **Proposição 7.2(2)**, este é o caso se e somente se $(\psi \wedge \chi) \in \Gamma^*$.
6. $\varphi \equiv \psi \vee \chi$: $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models \psi$ ou $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models \chi$ (por definição de satisfação) se e somente se $\psi \in \Gamma^*$ ou $\chi \in \Gamma^*$ (por hipótese de indução). Este é o caso se e somente se $(\psi \vee \chi) \in \Gamma^*$ (por **Proposição 7.2(3)**).
7. $\varphi \equiv \psi \rightarrow \chi$: $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\mathbf{v}(\Gamma^*) \not\models \psi$ ou $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models \chi$ (por definição de satisfação) se e somente se $\psi \notin \Gamma^*$ ou $\chi \in \Gamma^*$ (por hipótese de indução). Este é o caso se e somente se $(\psi \rightarrow \chi) \in \Gamma^*$ (por **Proposição 7.2(4)**).

7.6 O Teorema da Completude

explanation Vamos combinar nossos resultados: chegamos ao teorema da completude.

pl:com:cth:
sec

Teorema 7.6 (Teorema da Completude). *Seja Γ um conjunto de **sentenças**. Se Γ é consistente, então é satisfatível.*

pl:com:cth:
thm:completeness

Prova. Suponha que Γ seja consistente. Por **Lema 7.3**, existe um $\Gamma^* \supseteq \Gamma$ que é consistente e **completo**. Por **Lema 7.5**, $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models \varphi$ se e somente se $\varphi \in \Gamma^*$. Disso segue, em particular, que, para todo $\varphi \in \Gamma$, $\mathbf{v}(\Gamma^*) \models \varphi$, de modo que Γ é satisfatível. $\square$

Corolário 7.7 (Teorema da Completude, Segunda Versão). *Para todo Γ e **sentença** φ : se $\Gamma \models \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$.*

pl:com:cth:
cor:completeness

Prova. Note que os Γ em **Corolário 7.7** e **Teorema 7.6** são universalmente quantificados. Para nos certificarmos de que não nos confundimos, reformulemos **Teorema 7.6** usando uma variável diferente: para qualquer conjunto de **sentenças** Δ , se Δ é consistente, então é satisfatível. Por contraposição, se Δ não é satisfatível, então Δ é inconsistente. Usaremos isso para provar o corolário.

Suponha que $\Gamma \models \varphi$. Então $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfatível por **Proposição 1.20**. Tomando $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ como nosso Δ , a versão anterior de **Teorema 7.6** nos dá que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é inconsistente. Por **Proposições 3.18, 4.16, 5.16 e 6.23**, $\Gamma \vdash \varphi$. $\square$

Problema 7.2. Use **Corolário 7.7** para provar **Teorema 7.6**, mostrando assim que as duas formulações do teorema da completude são equivalentes.

Problema 7.3. Para que um sistema de **derivação** seja completo, suas regras devem ser fortes o suficiente para provar que todo conjunto insatisfatível é inconsistente. Quais das regras de **derivação** foram necessárias para provar a completude? Alguma dessas regras não é usada em nenhum lugar da prova? Para responder a essas perguntas, faça uma lista ou diagrama que mostre quais das regras de **derivação** foram usadas em quais resultados que levam à prova de **Teorema 7.6**. Certifique-se de anotar quaisquer usos tácitos de regras nessas provas.

7.7 O Teorema da Compacidade

Uma consequência importante do teorema da completude é o teorema da compacidade. O teorema da compacidade afirma que, se cada subconjunto *finito* de um conjunto de **sentenças** é satisfatível, o conjunto inteiro é satisfatível — mesmo que o próprio conjunto seja infinito. Isso está longe de ser óbvio. Não há nada que pareça descartar, ao menos à primeira vista, a possibilidade de existirem conjuntos infinitos de **sentenças** que sejam contraditórios, mas em que a contradição só surge, por assim dizer, do número infinito. O teorema da compacidade diz que tal cenário pode ser descartado: não existem conjuntos infinitos insatisfatíveis de **sentenças** tais que cada subconjunto finito deles seja

pl:com:com:
sec

satisfatível. Como o teorema da completude, ele tem uma versão relacionada à consequência lógica: se um conjunto infinito de **sentenças** implica algo, então já um subconjunto finito o implica.

Definição 7.8. Um conjunto Γ de **fórmulas** é *finitamente satisfatível* se e somente se todo $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito é satisfatível.

pl:com:com:
thm:compactness

Teorema 7.9 (Teorema da Compacidade). *O seguinte vale para quaisquer sentenças Γ e φ :*

1. $\Gamma \models \varphi$ se e somente se existe um $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Gamma_0 \models \varphi$.
2. Γ é satisfatível se e somente se é finitamente satisfatível.

Prova. Provamos (2). Se Γ é satisfatível, então existe a **valoração** $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v} \models \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$. É claro que essa $\mathbf{v}$ também satisfaz todo subconjunto finito de Γ , de modo que Γ é finitamente satisfatível.

Agora suponha que Γ seja finitamente satisfatível. Então todo subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ é satisfatível. Pela correção (**Corolários 3.28, 4.24, 5.26 e 6.32**), todo subconjunto finito é consistente. Então o próprio Γ deve ser consistente por **Proposições 3.16, 4.14, 5.14 e 6.18**. Pela completude (**Teorema 7.6**), como Γ é consistente, ele é satisfatível. $\square$

Problema 7.4. Prove (1) de **Teorema 7.9**.

7.8 Uma Prova Direta do Teorema da Compacidade

pl:com:cpd:
sec

Podemos provar o Teorema da Compacidade diretamente, sem apelar ao Teorema da Completude, usando as mesmas ideias da prova do teorema da completude. Na prova do Teorema da Completude, começamos com um conjunto Γ consistente de **sentenças**, expandimos-o para um conjunto Γ^* de **sentenças** consistente e **completo**, e então mostramos que no **valoração** $\mathbf{v}(\Gamma^*)$ construído a partir de Γ^* , todas as **sentenças** de Γ são verdadeiras, de modo que Γ é satisfatível.

Podemos usar o mesmo método para mostrar que um conjunto finitamente satisfatível de sentenças é satisfatível. Só temos que provar as versões correspondentes dos resultados que levam ao lema da verdade, substituindo “consistente” por “finitamente satisfatível”.

pl:com:cpd:
prop:fsat-ccs

Proposição 7.10. *Suponha que Γ é **completo** e finitamente satisfatível. Então:*

1. $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$ se, e somente se, tanto $\varphi \in \Gamma$ quanto $\psi \in \Gamma$.
2. $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$ se, e somente se, $\varphi \in \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.
3. $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$ se, e somente se, $\varphi \notin \Gamma$ ou $\psi \in \Gamma$.

Problema 7.5. Prove **Proposição 7.10**. Evite o uso de $\vdash$.

Lema 7.11. *Todo conjunto finitamente satisfatível Γ pode ser estendido a um conjunto **completo** e finitamente satisfatível Γ^* .* [pl:com:cpd:](#)
[lem:fsat-lindenbaum](#)

Problema 7.6. Prove **Lema 7.11**. (Dica: o passo crucial é mostrar que se Γ_n é finitamente satisfatível, então ou $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ ou $\Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ é finitamente satisfatível.)

Teorema 7.12 (Compacidade). *Γ é satisfatível se, e somente se, é finitamente satisfatível.* [pl:com:cpd:](#)
[thm:compactness-direct](#)

Prova. Se Γ é satisfatível, então há a **avaliação** $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v} \models \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$. É claro que esta $\mathbf{v}$ também satisfaz todo subconjunto finito de Γ , de modo que Γ é finitamente satisfatível.

Agora suponha que Γ é finitamente satisfatível. Por **Lema 7.11**, Γ pode ser estendido a um conjunto **completo** e finitamente satisfatível Γ^* . Construa o **avaliação** $\mathbf{v}(\Gamma^*)$ como em **Definição 7.4**. A prova do Lema da Verdade (**Lema 7.5**) funciona se substituírmos referências a **Proposição 7.2**. □

Problema 7.7. Escreva a prova completa do Lema da Verdade (**Lema 7.5**) na versão necessária para a prova de **Teorema 7.12**.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas