

## prf.1 Usando Definições

mod:prf:def:  
sec

Mencionamos que você deve estar familiarizado com todas as definições que possam ser usadas na prova, e que saiba aplicá-las corretamente. Esse é um ponto realmente importante, e vale a pena examiná-lo em um pouco mais de detalhe. As definições são usadas para abreviar propriedades e relações, de modo que possamos falar delas de forma mais sucinta. A abreviação introduzida é chamada de *definiendum*, e aquilo que ela abrevia é o *definiens*. Em provas, com frequência temos que voltar a como o definiendum foi introduzido, porque temos que explorar a estrutura lógica do definiens (a versão longa da qual o termo definido é a abreviação) para concluir nossa prova. Ao desdobrar as definições, você garante que está chegando ao cerne de onde a ação lógica acontece.

Começaremos com um exemplo. Suponha que você queira provar o seguinte:

**Proposição prf.1.** *Para quaisquer conjuntos  $A$  e  $B$ ,  $A \cup B = B \cup A$ .*

Para sequer iniciar a prova, precisamos saber o que significa que dois conjuntos sejam idênticos; isto é, precisamos saber o que o “=” naquela equação significa para conjuntos. Os conjuntos são definidos como idênticos sempre que têm os mesmos **membros**. Assim, a definição que temos que desdobrar é:

**Definição prf.2.** Os conjuntos  $A$  e  $B$  são *idênticos*,  $A = B$ , sse todo **membro** de  $A$  é **um membro** de  $B$ , e vice-versa.

Esta definição usa  $A$  e  $B$  como marcadores de posição para conjuntos arbitrários. O que ela define—o *definiendum*—é a expressão “ $A = B$ ”, dando a condição sob a qual  $A = B$  é verdadeira. Essa condição—“todo **membro** de  $A$  é **um membro** de  $B$ , e vice-versa”—é o *definiens*.<sup>1</sup> A definição especifica que  $A = B$  é verdadeira se, e somente se (abreviamos isso por “sse”) a condição vale.

Quando você aplica a definição, tem que fazer corresponder o  $A$  e o  $B$  da definição ao caso de que está tratando. No nosso caso, isso significa que, para que  $A \cup B = B \cup A$  seja verdadeira, cada  $z \in A \cup B$  também deve estar em  $B \cup A$ , e vice-versa. A expressão  $A \cup B$  na proposição faz o papel de  $A$  na definição, e  $B \cup A$ , o de  $B$ . Como  $A$  e  $B$  são usados tanto na definição quanto no enunciado da proposição que estamos provando, mas em usos diferentes, você precisa ter cuidado para não confundir os dois. Por exemplo, seria um erro pensar que você poderia provar a proposição mostrando que todo **membro** de  $A$  é **um membro** de  $B$ , e vice-versa—isso mostraria que  $A = B$ , não que  $A \cup B = B \cup A$ . (Além disso, como  $A$  e  $B$  podem ser quaisquer dois conjuntos, você não chegaria muito longe, pois, se nada for suposto sobre  $A$  e  $B$ , eles bem podem ser conjuntos diferentes.)

<sup>1</sup>Neste caso particular—e de modo bastante confuso!—quando  $A = B$ , os conjuntos  $A$  e  $B$  são apenas um único e mesmo conjunto, ainda que usemos letras diferentes para ele do lado esquerdo e do lado direito. Mas os modos pelos quais esse conjunto é identificado podem ser diferentes, e isso torna a definição não trivial.

Dentro da prova, estamos lidando com noções da teoria dos conjuntos, como união, e portanto também precisamos conhecer os significados do símbolo  $\cup$  a fim de entender como a prova deve prosseguir. E, às vezes, desdobrar a definição dá origem a outras definições a desdobrar. Por exemplo,  $A \cup B$  é definido como  $\{z : z \in A \text{ ou } z \in B\}$ . Então, se você quer provar que  $x \in A \cup B$ , desdobrar a definição de  $\cup$  lhe diz que você tem que provar  $x \in \{z : z \in A \text{ ou } z \in B\}$ . Agora você também tem que lembrar que  $x \in \{z : \dots z \dots\}$  sse  $\dots x \dots$ . Assim, desdobrando ainda mais a definição da notação  $\{z : \dots z \dots\}$ , o que você tem que mostrar é:  $x \in A$  ou  $x \in B$ . Assim, “todo **membro** de  $A \cup B$  é também **um membro** de  $B \cup A$ ” significa, na verdade: “para todo  $x$ , se  $x \in A$  ou  $x \in B$ , então  $x \in B$  ou  $x \in A$ .” Se desdobramos completamente as definições na proposição, vemos que o que temos que mostrar é isto:

**Proposição prf.3.** *Para quaisquer conjuntos  $A$  e  $B$ : (a) para todo  $x$ , se  $x \in A$  ou  $x \in B$ , então  $x \in B$  ou  $x \in A$ , e (b) para todo  $x$ , se  $x \in B$  ou  $x \in A$ , então  $x \in A$  ou  $x \in B$ .*

O que importa é que desdobrar definições é uma parte necessária da construção de uma prova. Fazê-lo corretamente é às vezes difícil: você deve ter cuidado para distinguir e fazer corresponder as variáveis da definição e os termos na afirmação que está provando. Para ter sucesso, você deve saber o que a questão está pedindo e o que todos os termos usados na questão significam—muitas vezes você precisará desdobrar mais de uma definição. Em provas simples como as que seguem, a solução decorre quase imediatamente das próprias definições. É claro que nem sempre será assim tão simples.

**Problema prf.1.** Suponha que lhe peçam para provar que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Desdobre todas as definições que ocorrem aqui, isto é, reenuncie isto de um modo que não mencione “ $\cap$ ”, “ $=$ ”, ou “ $\emptyset$ ”.

## Créditos das Imagens

## Referências Bibliográficas