

prf.1 Lendo Provas

math:prf:rea:
sec

As provas que você encontra em livros-texto e artigos muito raramente fornecem todos os detalhes que incluímos até agora em nossos exemplos. Os autores frequentemente não chamam a atenção para quando distinguem casos, quando dão uma prova indireta, ou não mencionam que usam uma definição. Assim, quando você lê uma prova em um livro-texto, muitas vezes terá de preencher esses detalhes por conta própria para entender a prova. Fazer isso também é um bom exercício para pegar o jeito dos vários passos que você tem de dar em uma prova. Vejamos um exemplo.

Proposição prf.1 (Absorção). *Para todos os conjuntos A , B ,*

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Prova. Se $z \in A \cap (A \cup B)$, então $z \in A$, logo $A \cap (A \cup B) \subseteq A$. Agora suponha $z \in A$. Então também $z \in A \cup B$, e portanto também $z \in A \cap (A \cup B)$. $\square$

A prova precedente da lei da absorção é muito condensada. Não há menção a quaisquer definições usadas, nenhum “temos de provar que” antes de prová-lo, etc. Vamos desempacotá-la. A proposição provada é uma afirmação geral sobre quaisquer conjuntos A e B , e quando a prova menciona A ou B , estes são variáveis para conjuntos arbitrários. As afirmações gerais que a prova estabelece são o que se exige para provar a identidade de conjuntos, isto é, que todo **membro** do lado esquerdo da identidade é **um membro** do direito e vice-versa.

“Se $z \in A \cap (A \cup B)$, então $z \in A$, logo $A \cap (A \cup B) \subseteq A$.”

Esta é a primeira metade da prova da identidade: ela estabelece que, se um z arbitrário é **um membro** do lado esquerdo, ele também é **um membro** do direito, isto é, $A \cap (A \cup B) \subseteq A$. Assuma que $z \in A \cap (A \cup B)$. Como z é **um membro** da interseção de dois conjuntos se, e somente se, é **um membro** de ambos os conjuntos, podemos concluir que $z \in A$ e também $z \in A \cup B$. Em particular, $z \in A$, que é o que queríamos mostrar. Como isso é tudo o que precisa ser feito para a primeira metade, sabemos que o restante da prova deve ser uma prova da segunda metade, isto é, uma prova de que $A \subseteq A \cap (A \cup B)$.

“Agora suponha $z \in A$. Então também $z \in A \cup B$, e portanto também $z \in A \cap (A \cup B)$.”

Começamos assumindo que $z \in A$, já que estamos mostrando que, para qualquer z , se $z \in A$ então $z \in A \cap (A \cup B)$. Para mostrar que $z \in A \cap (A \cup B)$, temos de mostrar (pela definição de “ $\cap$ ”) que (i) $z \in A$ e também (ii) $z \in A \cup B$. Aqui (i) é justamente nossa suposição, então não há mais nada a provar, e é por isso que a prova não a menciona novamente. Para (ii), lembre-se de que z é **um membro** de uma união de conjuntos se, e somente se, é **um membro**

de pelo menos um desses conjuntos. Como $z \in A$, e $A \cup B$ é a união de A e B , este é o caso aqui. Então $z \in A \cup B$. Mostramos ambos (i) $z \in A$ e (ii) $z \in A \cup B$, logo, pela definição de “ $\cap$,” $z \in A \cap (A \cup B)$. A prova não menciona essas definições; presume-se que o leitor já as tenha internalizado. Se você não as internalizou, terá de voltar e relembrar quais são. Então também terá de reconhecer por que decorre de $z \in A$ que $z \in A \cup B$, e de $z \in A$ e $z \in A \cup B$ que $z \in A \cap (A \cup B)$.

Eis outra versão da prova acima, com tudo tornado explícito:

Prova. [Pela definição de $=$ para conjuntos, $A \cap (A \cup B) = A$, temos de mostrar (a) $A \cap (A \cup B) \subseteq A$ e (b) $A \cap (A \cup B) \subseteq A$. (a): Pela definição de $\subseteq$, temos de mostrar que se $z \in A \cap (A \cup B)$, então $z \in A$.] Se $z \in A \cap (A \cup B)$, então $z \in A$ [já que pela definição de $\cap$, $z \in A \cap (A \cup B)$ se, e somente se, $z \in A$ e $z \in A \cup B$], logo $A \cap (A \cup B) \subseteq A$. [(b): Pela definição de $\subseteq$, temos de mostrar que se $z \in A$, então $z \in A \cap (A \cup B)$.] Agora suponha [(1)] $z \in A$. Então também [(2)] $z \in A \cup B$ [já que por (1) $z \in A$ ou $z \in B$, o que pela definição de $\cup$ significa $z \in A \cup B$], e portanto também $z \in A \cap (A \cup B)$ [já que a definição de $\cap$ requer que $z \in A$, isto é, (1), e $z \in A \cup B$, isto é, (2)]. $\square$

Problema prf.1. Expand a seguinte prova de $A \cup (A \cap B) = A$, mencionando todos os padrões de inferência usados, por que cada passo decorre de suposições ou afirmações estabelecidas antes dele, e onde temos de apelar para quais definições.

Prova. Se $z \in A \cup (A \cap B)$ então $z \in A$ ou $z \in A \cap B$. Se $z \in A \cap B$, $z \in A$. Qualquer $z \in A$ está também $\in A \cup (A \cap B)$. $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas