

prf.1 Introdução

math:prf:int:
sec

Com base em suas experiências na lógica introdutória, você talvez se sinta à vontade com um sistema de **derivação**—provavelmente um sistema de **derivação** de dedução natural ou no estilo Fitch, ou talvez um sistema de árvores de prova. Você provavelmente se lembra de fazer provas nesses sistemas, seja provando **a fórmula**, seja mostrando que um dado argumento é válido. Para fazer isso, você aplicava as regras do sistema até obter o resultado final desejado. Ao raciocinar *sobre* lógica, também provamos coisas, mas na maioria dos casos não estamos usando um sistema de **derivação**. De fato, a maior parte das provas que consideramos é feita em português (talvez com alguma linguagem simbólica inserida) e não inteiramente na linguagem da lógica de primeira ordem. Ao construir tais provas, você pode a princípio ficar perdido—como provo algo sem um sistema de **derivação**? Como começo? Como sei se minha prova está correta?

Antes de tentar uma prova, é importante saber o que é uma prova e como construir uma. Como o nome sugere, uma *prova* destina-se a mostrar que algo é verdadeiro. Você pode pensar nisso em termos de um diálogo—alguém lhe pergunta se algo é verdadeiro, digamos, se todo primo diferente de dois é um número ímpar. Responder “sim” não é suficiente; a pessoa pode querer saber *por quê*. Nesse caso, você lhe daria uma prova.

No discurso cotidiano, pode ser suficiente esboçar uma resposta, ou dar uma resposta incompleta. Na lógica e na matemática, porém, queremos uma prova rigorosa—queremos mostrar que algo é verdadeiro além de *qualquer* dúvida. Isso significa que cada passo de nossa prova deve ser justificado, e a justificativa deve ser convincente (isto é, a suposição que você está usando é de fato assumida no enunciado do teorema que você está provando, as definições que você aplica devem ser aplicadas corretamente, as justificativas invocadas devem ser inferências corretas, etc.).

Em geral, estamos provando algum enunciado. Chamamos os enunciados que provamos por vários nomes: proposições, teoremas, lemas ou corolários. Uma proposição é um enunciado básico digno de prova: importante o suficiente para ser registrado, mas talvez não particularmente profundo nem aplicado com frequência. Um teorema é uma proposição significativa e importante. Sua prova é frequentemente dividida em vários passos, e às vezes recebe o nome da pessoa que primeiro o provou (por exemplo, o Teorema de Cantor, o teorema de Löwenheim–Skolem) ou do fato de que trata (por exemplo, o teorema da completude). Um lema é uma proposição ou teorema usado na prova de um resultado mais importante. De modo confuso, às vezes os lemas são resultados importantes em si mesmos, e também recebem o nome da pessoa que os introduziu (por exemplo, o Lema de Zorn). Um corolário é um resultado que decorre facilmente de outro.

Um enunciado a ser provado frequentemente contém suposições que esclarecem sobre quais tipos de coisas estamos provando algo. Ele pode começar com “Seja φ **a fórmula** da forma $\psi \rightarrow \chi$ ” ou “Suponha $\Gamma \vdash \varphi$ ” ou algo do gênero. Essas são as *hipóteses* da proposição, teorema ou lema, e você pode assumi-las

como verdadeiras em sua prova. Elas restringem o que estamos provando e também introduzem alguns nomes para os objetos sobre os quais estamos falando. Por exemplo, se sua proposição começa com “Seja φ a fórmula da forma $\psi \rightarrow \chi$ ”, você está provando algo apenas sobre todas as fórmulas de certo tipo (a saber, condicionais), e fica entendido que $\psi \rightarrow \chi$ é um condicional arbitrário sobre o qual sua prova falará.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas