

prf.1 Outro Exemplo

math:prf:ex2:
sec

Proposição prf.1. Se $A \subseteq C$, então $A \cup (C \setminus A) = C$.

Prova. Suponha que $A \subseteq C$. Queremos mostrar que $A \cup (C \setminus A) = C$.

Começamos observando que esta é uma afirmação condicional. Ela está tacitamente quantificada universalmente: a proposição vale para todos os conjuntos A e C . Assim, A e C são variáveis para conjuntos arbitrários. Para provar tal afirmação, supomos o antecedente e provamos o consequente.

Continuamos usando a suposição de que $A \subseteq C$. Vamos desdobrar a definição de $\subseteq$: a suposição significa que todos os **membros** de A são também **membros** de C . Vamos anotar isto—é um fato importante que usaremos ao longo da prova.

Pela definição de $\subseteq$, como $A \subseteq C$, para todo z , se $z \in A$, então $z \in C$.

Desdobramos todas as definições que nos são dadas na suposição. Agora podemos passar à conclusão. Queremos mostrar que $A \cup (C \setminus A) = C$, e por isso montamos uma prova de modo semelhante ao último exemplo: mostramos que todo **membro** de $A \cup (C \setminus A)$ é também **um membro** de C e, reciprocamente, todo **membro** de C é **um membro** de $A \cup (C \setminus A)$. Podemos abreviar isso para: $A \cup (C \setminus A) \subseteq C$ e $C \subseteq A \cup (C \setminus A)$. (Aqui estamos fazendo o oposto de desdobrar uma definição, mas isso torna a prova um pouco mais fácil de ler.) Como isso é uma conjunção, temos que provar ambas as partes. Para mostrar a primeira parte, isto é, que todo **membro** de $A \cup (C \setminus A)$ é também **um membro** de C , supomos que $z \in A \cup (C \setminus A)$ para um z arbitrário e mostramos que $z \in C$. Pela definição de $\cup$, podemos concluir que $z \in A$ ou $z \in C \setminus A$ a partir de $z \in A \cup (C \setminus A)$. Você já deve estar pegando o jeito disso.

$A \cup (C \setminus A) = C$ sse $A \cup (C \setminus A) \subseteq C$ e $C \subseteq (A \cup (C \setminus A))$. Primeiro provamos que $A \cup (C \setminus A) \subseteq C$. Seja $z \in A \cup (C \setminus A)$. Então, ou $z \in A$ ou $z \in (C \setminus A)$.

Chegamos a uma disjunção, e a partir dela queremos provar que $z \in C$. Fazemos isso usando a prova por casos.

Caso 1: $z \in A$. Como, para todo z , se $z \in A$, $z \in C$, temos que $z \in C$.

Aqui usamos o fato registrado anteriormente, que decorreu da hipótese da proposição de que $A \subseteq C$. O primeiro caso está completo, e passamos ao segundo caso, $z \in (C \setminus A)$. Lembre-se de que $C \setminus A$ denota a *diferença* dos dois conjuntos, isto é, o conjunto de todos os **membros** de C que não são **membros** de A . Mas qualquer **membro** de C que não esteja em A é, em particular, **um membro** de C .

Caso 2: $z \in (C \setminus A)$. Isso significa que $z \in C$ e $z \notin A$. Então, em particular, $z \in C$.

Ótimo, provamos a primeira direção. Agora a segunda direção. Aqui provamos que $C \subseteq A \cup (C \setminus A)$. Então supomos que $z \in C$ e provamos que $z \in A \cup (C \setminus A)$.

Agora seja $z \in C$. Queremos mostrar que $z \in A$ ou $z \in C \setminus A$.

Como todos os **membros** de A são também **membros** de C , e $C \setminus A$ é o conjunto de todas as coisas que são **membros** de C mas não de A , segue-se que z está ou em A ou em $C \setminus A$. Isso pode ser um pouco obscuro se você ainda não souber por que o resultado é verdadeiro. Seria melhor prová-lo passo a passo. Ajudará usar um fato simples que podemos enunciar sem prova: $z \in A$ ou $z \notin A$. Isso é chamado de “princípio do terceiro excluído:” para qualquer afirmação p , ou p é verdadeira ou sua negação é verdadeira. (Aqui, p é a afirmação de que $z \in A$.) Como isso é uma disjunção, podemos novamente usar a prova por casos.

Ou $z \in A$ ou $z \notin A$. No primeiro caso, $z \in A \cup (C \setminus A)$. No segundo caso, $z \in C$ e $z \notin A$, de modo que $z \in C \setminus A$. Mas então $z \in A \cup (C \setminus A)$.

Nossa prova está completa: mostramos que $A \cup (C \setminus A) = C$. □

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas