

prf.1 Um Exemplo

mth:prf:ex1:
sec Nosso primeiro exemplo é o seguinte fato simples sobre uniões e interseções de conjuntos. Ele ilustrará o desdobramento de definições, provas de conjunções, de afirmações universais, e a prova por casos.

Proposição prf.1. *Para quaisquer conjuntos A , B e C , $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$*

Vamos prová-la!

Prova. Queremos mostrar que, para quaisquer conjuntos A , B e C , $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Primeiro desdobramos a definição de “=” no enunciado da proposição. Lembre-se de que provar que conjuntos são idênticos significa mostrar que os conjuntos têm os mesmos **membros**. Isto é, todos os **membros** de $A \cup (B \cap C)$ são também **membros** de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, e vice-versa. O “vice-versa” significa que também todo **membro** de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ deve ser **um membro** de $A \cup (B \cap C)$. Assim, ao desdobrar a definição, vemos que temos que provar uma conjunção. Vamos registrar isso:

Por definição, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ sse todo **membro** de $A \cup (B \cap C)$ é também **um membro** de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, e todo **membro** de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ é **um membro** de $A \cup (B \cap C)$.

Como isso é uma conjunção, devemos provar cada conjuntiva separadamente. Vamos começar pela primeira: vamos provar que todo **membro** de $A \cup (B \cap C)$ é também **um membro** de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Esta é uma afirmação universal, e por isso consideramos um **membro** arbitrário de $A \cup (B \cap C)$ e mostramos que ele também deve ser **um membro** de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Vamos escolher uma variável para chamar esse **membro** arbitrário, digamos, z . Nossa prova continua:

Primeiro, provamos que todo **membro** de $A \cup (B \cap C)$ é também **um membro** de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Seja $z \in A \cup (B \cap C)$. Temos que mostrar que $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Agora é hora de desdobrar a definição de $\cup$ e $\cap$. Por exemplo, a definição de $\cup$ é: $A \cup B = \{z : z \in A \text{ ou } z \in B\}$. Quando aplicamos a definição a “ $A \cup (B \cap C)$,” o papel do “ B ” na definição passa a ser desempenhado por “ $B \cap C$,” de modo que $A \cup (B \cap C) = \{z : z \in A \text{ ou } z \in B \cap C\}$. Então nossa suposição de que $z \in A \cup (B \cap C)$ equivale a: $z \in \{z : z \in A \text{ ou } z \in B \cap C\}$. E $z \in \{z : \dots z \dots\}$ sse $\dots z \dots$, isto é, neste caso, $z \in A$ ou $z \in B \cap C$.

Pela definição de $\cup$, ou $z \in A$ ou $z \in B \cap C$.

Como isso é uma disjunção, será útil aplicar a prova por casos. Tomamos os dois casos, e mostramos que, em cada um, a conclusão que buscamos (a saber, “ $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ”) se obtém.

Caso 1: Suponha que $z \in A$.

Não há muito mais com que trabalhar a partir das nossas suposições. Então vamos olhar para o que temos com que trabalhar na conclusão. Queremos mostrar que $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Com base na definição de $\cap$, se queremos mostrar que $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, temos que mostrar que ele está tanto em $(A \cup B)$ quanto em $(A \cup C)$. Mas $z \in A \cup B$ sse $z \in A$ ou $z \in B$, e já temos (como a suposição do caso 1) que $z \in A$. Pelo mesmo raciocínio—trocando C por B — $z \in A \cup C$. Esse argumento foi na direção inversa, então vamos registrar nosso raciocínio na direção necessária à nossa prova.

Como $z \in A$, $z \in A$ ou $z \in B$, e logo, pela definição de $\cup$, $z \in A \cup B$. De modo semelhante, $z \in A \cup C$. Mas isso significa que $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, pela definição de $\cap$.

Isso completa o primeiro caso da prova por casos. Agora queremos derivar a conclusão no segundo caso, em que $z \in B \cap C$.

Caso 2: Suponha que $z \in B \cap C$.

Novamente, estamos trabalhando com a interseção de dois conjuntos. Vamos aplicar a definição de $\cap$:

Como $z \in B \cap C$, z deve ser **um membro** tanto de B quanto de C , pela definição de $\cap$.

É hora de olhar de novo para a nossa conclusão. Temos que mostrar que z está tanto em $(A \cup B)$ quanto em $(A \cup C)$. E, novamente, a solução é imediata.

Como $z \in B$, $z \in (A \cup B)$. Como $z \in C$, também $z \in (A \cup C)$. Então, $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Aqui aplicamos as definições de $\cup$ e $\cap$ novamente, mas como já relembramos essas definições, e já mostramos que, se z está em um de dois conjuntos, ele está na união deles, não precisamos ser tão explícitos no que fizemos.

Completamos o segundo caso da prova por casos, então agora podemos afirmar nossa primeira conclusão.

Então, se $z \in A \cup (B \cap C)$, então $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Agora queremos apenas mostrar a outra direção, que todo **membro** de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ é **um membro** de $A \cup (B \cap C)$. Como antes, provamos essa afirmação universal supondo que temos um **membro** arbitrário do primeiro conjunto e mostrando que ele deve estar no segundo conjunto. Vamos declarar o que estamos prestes a fazer.

Agora, suponha que $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Queremos mostrar que $z \in A \cup (B \cap C)$.

Estamos agora trabalhando a partir da hipótese de que $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Esperamos que não seja confuso demais estarmos usando o mesmo z aqui que na primeira parte da prova. Quando terminamos aquela parte, todas as suposições que fizemos ali deixaram de estar em vigor, então agora podemos fazer novas suposições sobre o que z é. Se isso for confuso para você, basta substituir z por uma variável diferente no que segue.

Sabemos que z está tanto em $A \cup B$ quanto em $A \cup C$, pela definição de $\cap$. E, pela definição de $\cup$, podemos desdobrar isso ainda mais em: ou $z \in A$ ou $z \in B$, e também ou $z \in A$ ou $z \in C$. Isso parece uma prova por casos de novo—exceto que o “e” a torna confusa. Você poderia pensar que isso equivale a haver três possibilidades: z está ou em A , B ou C . Mas isso seria um erro. Temos que ter cuidado, então vamos considerar cada disjunção por vez.

Pela definição de $\cap$, $z \in A \cup B$ e $z \in A \cup C$. Pela definição de $\cup$, $z \in A$ ou $z \in B$. Distinguimos casos.

Como estamos nos concentrando na primeira disjunção, ainda não obtivemos nossa segunda disjunção (do desdobramento de $A \cup C$). De fato, ainda não precisamos dela. O primeiro caso é $z \in A$, e **um membro** de um conjunto é também **um membro** da união desse conjunto com qualquer outro. Então o caso 1 é fácil:

Caso 1: Suponha que $z \in A$. Segue-se que $z \in A \cup (B \cap C)$.

Agora, para o segundo caso, $z \in B$. Aqui desdobraremos o segundo $\cup$ e faremos outra prova por casos:

Caso 2: Suponha que $z \in B$. Como $z \in A \cup C$, ou $z \in A$ ou $z \in C$. Distinguimos os casos ainda mais:

Caso 2a: $z \in A$. Então, novamente, $z \in A \cup (B \cap C)$.

Ok, isso foi um pouco estranho. Na verdade, não precisamos da suposição de que $z \in B$ para este caso, mas tudo bem.

Caso 2b: $z \in C$. Então $z \in B$ e $z \in C$, de modo que $z \in B \cap C$, e consequentemente, $z \in A \cup (B \cap C)$.

Isso conclui ambas as provas por casos, e assim terminamos a segunda metade.

Então, se $z \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, então $z \in A \cup (B \cap C)$. □

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas