

ind.1 Indução Estrutural

math.ind.sti:
sec

Até aqui usamos a indução para estabelecer resultados sobre todos os números naturais. Mas um princípio correspondente pode ser usado diretamente para provar resultados sobre todos os **membros** de um conjunto definido indutivamente. Isso é frequentemente chamado de indução *estrutural*, porque depende da estrutura dos objetos definidos indutivamente.

Em geral, uma definição indutiva é dada por (a) uma lista de **membros** “iniciais” do conjunto e (b) uma lista de operações que produzem novos **membros** do conjunto a partir de antigos. No caso dos termos bonitos, por exemplo, os objetos iniciais são as letras. Temos apenas uma operação: as operações são

$$o(s_1, s_2) = [s_1 \circ s_2]$$

Você pode até pensar nos próprios números naturais $\mathbb{N}$ como sendo dados por uma definição indutiva: o objeto inicial é 0, e a operação é a função sucessor $x + 1$.

Para provar algo sobre todos os elementos de um conjunto definido indutivamente, isto é, que todo **membro** do conjunto tem uma propriedade P , devemos:

1. Provar que os objetos iniciais têm P
2. Provar que, para cada operação o , se os argumentos têm P , o resultado também tem.

Por exemplo, para provar algo sobre todos os termos bonitos, nós provaríamos que é verdadeiro para todas as letras, e que é verdadeiro para $[s_1 \circ s_2]$ desde que seja verdadeiro de s_1 e s_2 individualmente.

Proposição ind.1. *O número de [é igual ao número de] em qualquer termo bonito t .*

Prova. Usamos a indução estrutural. Os termos bonitos são definidos indutivamente, com as letras como objetos iniciais e a operação o para construir novos termos bonitos a partir de antigos.

1. A afirmação é verdadeira para toda letra, já que o número de [em uma letra isolada é 0 e o número de] nela também é 0.
2. Suponha que o número de [em s_1 é igual ao número de], e o mesmo é verdadeiro para s_2 . O número de [em $o(s_1, s_2)$, isto é, em $[s_1 \circ s_2]$, é a soma do número de [em s_1 e s_2 mais um. O número de] em $o(s_1, s_2)$ é a soma do número de] em s_1 e s_2 mais um. Assim, o número de [em $o(s_1, s_2)$ é igual ao número de] em $o(s_1, s_2)$. $\square$

Problema ind.1. Prove, por indução estrutural, que nenhum termo bonito começa com] .

Vamos dar outra prova por indução estrutural: um segmento inicial próprio de uma cadeia t de símbolos é qualquer cadeia s que concorda com t símbolo por símbolo, lida da esquerda, mas t é mais longa. Assim, por exemplo, $[a \circ$ é um segmento inicial próprio de $[a \circ b]$, mas nem $[b \circ$ (discordam no segundo símbolo) nem $[a \circ b]$ (têm o mesmo comprimento) o são.

Proposição ind.2. *Todo segmento inicial próprio de um termo bonito t tem mais [do que].* *math:ind:sti:*
prop:initial

Prova. Por indução em t :

1. t é uma letra isolada: Então t não tem segmentos iniciais próprios.
2. $t = [s_1 \circ s_2]$ para alguns termos bonitos s_1 e s_2 . Se r é um segmento inicial próprio de t , há várias possibilidades:
 - a) r é apenas [: Então r tem um [a mais do que].
 - b) r é $[r_1$ em que r_1 é um segmento inicial próprio de s_1 : Como s_1 é um termo bonito, por hipótese de indução, r_1 tem mais [do que], e o mesmo é verdadeiro para $[r_1$.
 - c) r é $[s_1$ ou $[s_1 \circ$: Pelo resultado anterior, o número de [e] em s_1 é igual; então o número de [em $[s_1$ ou $[s_1 \circ$ é um a mais do que o número de].
 - d) r é $[s_1 \circ r_2$ em que r_2 é um segmento inicial próprio de s_2 : Por hipótese de indução, r_2 contém mais [do que]. Pelo resultado anterior, o número de [e de] em s_1 é igual. Então o número de [em $[s_1 \circ r_2$ é maior do que o número de].
 - e) r é $[s_1 \circ s_2$: Pelo resultado anterior, o número de [e] em s_1 é igual, e o mesmo para s_2 . Então há um [a mais em $[s_1 \circ s_2$ do que há]. $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas