

ind.1 Indução Forte

mtb:ind:str:
sec No princípio de indução discutido acima, provamos $P(0)$ e também que, se $P(k)$, então $P(k+1)$. Na segunda parte, assumimos que $P(k)$ é verdadeiro e usamos essa suposição para provar $P(k+1)$. De forma equivalente, é claro, poderíamos assumir $P(k-1)$ e usá-la para provar $P(k)$ —o importante é que sejamos capazes de realizar a inferência de qualquer número para seu sucessor; que possamos provar a afirmação em questão para qualquer número sob a suposição de que ela vale para seu antecessor.

Há uma variante do princípio de indução em que não apenas assumimos que a afirmação vale para o antecessor $k-1$ de k , mas para todos os números menores que k , e usamos essa suposição para estabelecer a afirmação para k . Isso também nos dá a afirmação $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pois, uma vez que tenhamos estabelecido $P(0)$, teremos com isso estabelecido que P vale para todos os números menores que 1. E se sabemos que, se $P(l)$ para todo $l < k$, então $P(k)$, sabemos isso em particular para $k=1$. Então podemos concluir $P(1)$. Com isso provamos $P(0)$ e $P(1)$, isto é, $P(l)$ para todo $l < 2$, e como temos também o condicional, se $P(l)$ para todo $l < 2$, então $P(2)$, podemos concluir $P(2)$, e assim por diante.

De fato, se conseguirmos estabelecer o condicional geral “para todo k , se $P(l)$ para todo $l < k$, então $P(k)$,” não temos mais de estabelecer $P(0)$, já que ele decorre disso. Pois lembre-se de que uma afirmação geral como “para todo $l < k$, $P(l)$ ” é verdadeira se não houver nenhum $l < k$. Este é um caso de quantificação vazia: “todos os A s são B s” é verdadeiro se não houver nenhum A , $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ é verdadeiro se nenhum x satisfaz $\varphi(x)$. Neste caso, a versão formalizada seria “ $\forall l (l < k \rightarrow P(l))$ ”—e isso é verdadeiro se não houver nenhum $l < k$. E se $k=0$ esse é exatamente o caso: não há nenhum $l < 0$, logo “para todo $l < 0$, $P(l)$ ” é verdadeiro, qualquer que seja P . Uma prova de “se $P(l)$ para todo $l < k$, então $P(k)$ ” estabelece assim automaticamente $P(0)$.

Esta variante é útil se estabelecer a afirmação para k não puder ser feito de modo a apenas se apoiar na afirmação para $k-1$, mas puder exigir a suposição de que ela é verdadeira para um ou mais $l < k$.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas