

ind.1 Relações e Funções

math:ind:rel:
sec

Quando definimos um conjunto de objetos (como os números naturais ou os termos bonitos) indutivamente, também podemos definir *relações sobre* esses objetos por indução. Por exemplo, considere a seguinte ideia: um termo bonito t_1 é um subtermo de um termo bonito t_2 se ocorre como parte dele. Vamos usar um símbolo para isso: $t_1 \sqsubseteq t_2$. Todo termo bonito é, é claro, um subtermo de si mesmo: $t \sqsubseteq t$. Podemos dar uma definição indutiva dessa relação como segue:

Definição ind.1. A relação de um termo bonito t_1 ser um subtermo de t_2 , $t_1 \sqsubseteq t_2$, é definida por indução em t_2 como segue:

1. Se t_2 é uma letra, então $t_1 \sqsubseteq t_2$ sse $t_1 = t_2$.
2. Se t_2 é $[s_1 \circ s_2]$, então $t_1 \sqsubseteq t_2$ sse $t_1 = t_2$, $t_1 \sqsubseteq s_1$, ou $t_1 \sqsubseteq s_2$.

Esta definição, por exemplo, nos dirá que $a \sqsubseteq [b \circ a]$. Pois (2) diz que $a \sqsubseteq [b \circ a]$ sse $a = [b \circ a]$, ou $a \sqsubseteq b$, ou $a \sqsubseteq a$. As duas primeiras são falsas: a claramente não é idêntico a $[b \circ a]$, e por (1), $a \sqsubseteq b$ sse $a = b$, o que também é falso. No entanto, também por (1), $a \sqsubseteq a$ sse $a = a$, o que é verdadeiro.

É importante observar que o sucesso desta definição depende de um fato que ainda não provamos: todo termo bonito t ou é uma letra isolada, ou existem termos bonitos *univocamente determinados* s_1 e s_2 tais que $t = [s_1 \circ s_2]$. “Univocamente determinados” aqui significa que, se $t = [s_1 \circ s_2]$, ele não é *também* $= [r_1 \circ r_2]$ com $s_1 \neq r_1$ ou $s_2 \neq r_2$. Se este fosse o caso, então a cláusula (2) poderia entrar em conflito consigo mesma: lendo t_2 como $[s_1 \circ s_2]$ poderíamos obter $t_1 \sqsubseteq t_2$, mas se lermos t_2 como $[r_1 \circ r_2]$ poderíamos obter não $t_1 \sqsubseteq t_2$. Antes de provarmos que isso não pode acontecer, vejamos um exemplo em que ele *pode* acontecer.

Definição ind.2. Defina *termos sem colchetes* indutivamente por

1. Toda letra é um termo sem colchetes.
2. Se s_1 e s_2 são termos sem colchetes, então $s_1 \circ s_2$ é um termo sem colchetes.
3. Nada mais é um termo sem colchetes.

Termos sem colchetes são, por exemplo, a , $b \circ d$, $b \circ a \circ b$. Agora, se definíssemos “subtermo” para termos sem colchetes do modo como fizemos acima, a segunda cláusula diria

Se $t_2 = s_1 \circ s_2$, então $t_1 \sqsubseteq t_2$ sse $t_1 = t_2$, $t_1 \sqsubseteq s_1$, ou $t_1 \sqsubseteq s_2$.

Agora, $b \circ a \circ b$ é da forma $s_1 \circ s_2$ com

$$s_1 = b \text{ e}$$

$$s_2 = a \circ b.$$

Ele também é da forma $r_1 \circ r_2$ com

$$r_1 = b \circ a \text{ e } r_2 = b.$$

Agora, $a \circ b$ é um subtermo de $b \circ a \circ b$? A resposta é sim, se seguirmos a primeira leitura, e não, se seguirmos a segunda.

A propriedade de que o modo como um termo bonito é construído a partir de outros termos bonitos é único é chamada de *leitura única*. Como definições indutivas de relações para tais objetos definidos indutivamente são importantes, temos que provar que ela vale.

Proposição ind.3. *Suponha que t é um termo bonito. Então ou t é uma letra isolada, ou existem termos bonitos univocamente determinados s_1, s_2 tais que $t = [s_1 \circ s_2]$.*

Prova. Se t é uma letra isolada, a condição é satisfeita. Então suponha que t não é uma letra isolada. Podemos perceber, pela definição indutiva, que então t deve ser da forma $[s_1 \circ s_2]$ para alguns termos bonitos s_1 e s_2 . Resta mostrar que estes são univocamente determinados, isto é, se $t = [r_1 \circ r_2]$, então $s_1 = r_1$ e $s_2 = r_2$.

Então suponha $t = [s_1 \circ s_2]$ e também $t = [r_1 \circ r_2]$ para termos bonitos s_1, s_2, r_1, r_2 . Temos que mostrar que $s_1 = r_1$ e $s_2 = r_2$. Primeiro, s_1 e r_1 devem ser idênticos, pois, caso contrário, um é um segmento inicial próprio do outro. Mas, por ??, isso é impossível se s_1 e r_1 são ambos termos bonitos. Mas se $s_1 = r_1$, então claramente também $s_2 = r_2$. $\square$

Também podemos definir funções indutivamente: por exemplo, podemos definir a função f que mapeia qualquer termo bonito na profundidade máxima de aninhamento de $[\dots]$ nele como segue:

Definição ind.4. A *profundidade* de um termo bonito, $f(t)$, é definida indutivamente como segue:

[mth:ind:rel:](#)
[defn:depth](#)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \text{ é uma letra} \\ \max(f(s_1), f(s_2)) + 1 & \text{se } t = [s_1 \circ s_2]. \end{cases}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} f([a \circ b]) &= \max(f(a), f(b)) + 1 = \\ &= \max(0, 0) + 1 = 1, \text{ e} \\ f([([a \circ b] \circ c)]) &= \max(f([a \circ b]), f(c)) + 1 = \\ &= \max(1, 0) + 1 = 2. \end{aligned}$$

Aqui, é claro, supomos que s_1 e s_2 são termos bonitos, e fazemos uso do fato de que todo termo bonito ou é uma letra ou é da forma $[s_1 \circ s_2]$. É novamente importante que ele possa ser dessa forma de apenas um modo. Para ver por

quê, considere novamente os termos sem colchetes que definimos antes. A “definição” correspondente seria:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \text{ é uma letra} \\ \max(g(s_1), g(s_2)) + 1 & \text{se } t = s_1 \circ s_2. \end{cases}$$

Agora considere o termo sem colchetes $a \circ b \circ c \circ d$. Ele pode ser lido de mais de um modo, por exemplo, como $s_1 \circ s_2$ com

$$s_1 = a \text{ e } s_2 = b \circ c \circ d,$$

ou como $r_1 \circ r_2$ com

$$r_1 = a \circ b \text{ e } r_2 = c \circ d.$$

Calcular g de acordo com o primeiro modo de lê-lo daria

$$\begin{aligned} g(s_1 \circ s_2) &= \max(g(a), g(b \circ c \circ d)) + 1 = \\ &= \max(0, 2) + 1 = 3 \end{aligned}$$

enquanto, de acordo com a outra leitura, obtemos

$$\begin{aligned} g(r_1 \circ r_2) &= \max(g(a \circ b), g(c \circ d)) + 1 = \\ &= \max(1, 1) + 1 = 2 \end{aligned}$$

Mas uma função deve sempre produzir um valor único; então nossa “definição” de g não define função alguma.

Problema ind.1. Dê uma definição indutiva da função l , em que $l(t)$ é o número de símbolos no termo bonito t .

Problema ind.2. Prove, por indução estrutural sobre termos bonitos t , que $f(t) < l(t)$ (em que $l(t)$ é o número de símbolos em t e $f(t)$ é a profundidade de t tal como definida em [Definição ind.4](#)).

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas