

ind.1 Definições Indutivas

mth:ind:idf:
sec Em lógica, muito frequentemente definimos tipos de objetos *indutivamente*, isto é, especificando regras para o que conta como um objeto do tipo a ser definido, que explicam como obter novos objetos desse tipo a partir de objetos antigos desse tipo. Por exemplo, frequentemente definimos tipos especiais de sequências de símbolos, como os termos e *fórmulas* de uma linguagem, por indução. Para um exemplo simples, considere cadeias compostas das letras a, b, c, d, do símbolo $\circ$, e dos colchetes [e], como “[c $\circ$ d]”, “[a $\circ$]”, “a” ou “[a $\circ$ b] $\circ$ d]”. Você provavelmente sente que há algo “errado” com as duas primeiras cadeias: os colchetes não “se equilibram” de modo algum na primeira, e você pode sentir que o “ $\circ$ ” deveria “conectar” expressões que elas próprias façam sentido. A terceira e a quarta cadeia parecem melhores: para todo “[” há um “]” de fechamento (se houver algum), e para qualquer $\circ$ podemos encontrar expressões “bonitas” de cada lado, cercadas por um par de parênteses.

Gostaríamos de especificar precisamente o que conta como um “termo bonito.” Em primeiro lugar, toda letra isolada é bonita. Qualquer coisa que não seja apenas uma letra isolada deve ser da forma “[t $\circ$ s]” em que s e t são, eles próprios, bonitos. Reciprocamente, se t e s são bonitos, então podemos formar um novo termo bonito pondo um $\circ$ entre eles e cercado-os por um par de colchetes. Poderíamos usar essas operações para *definir* o conjunto dos termos bonitos. Esta é uma *definição indutiva*.

Definição ind.1 (Termos bonitos). O conjunto dos *termos bonitos* é definido indutivamente como segue:

1. Qualquer letra a, b, c, d é um termo bonito.
2. Se s_1 e s_2 são termos bonitos, então também $\circ$ é $[s_1 \circ s_2]$.
3. Nada mais é um termo bonito.

Esta definição nos diz que algo conta como um termo bonito sse ele pode ser construído de acordo com as duas condições (1) e (2) em algum número finito de passos. No primeiro passo, construímos todos os termos bonitos compostos apenas por letras isoladas, isto é,

$$a, b, c, d$$

No segundo passo, aplicamos (2) aos termos que construímos. Obteremos

$$[a \circ a], [a \circ b], [b \circ a], \dots, [d \circ d]$$

para todas as combinações de duas letras. No terceiro passo, aplicamos (2) novamente, a quaisquer dois termos bonitos que construímos até agora. Obtemos novos termos bonitos como $[a \circ [a \circ a]]$ —em que t é a do passo 1 e s é $[a \circ a]$ do passo 2—e $[[b \circ c] \circ [d \circ b]]$ construído a partir dos dois termos $[b \circ c]$ e $[d \circ b]$ do passo 2. E assim por diante. A cláusula (3) impede que qualquer coisa não construída desse modo se infiltre no conjunto dos termos bonitos.

Note que ainda não provamos que toda sequência de símbolos que “parece” bonita é bonita de acordo com esta definição. No entanto, deve ficar claro que tudo o que podemos construir de fato “parece bonito”: os colchetes estão equilibrados, e o conecta partes que são, elas próprias, bonitas.

A característica-chave das definições indutivas é que, se você quer provar algo sobre todos os termos bonitos, a definição lhe diz quais casos você deve considerar. Por exemplo, se lhe é dito que t é um termo bonito, a definição indutiva lhe diz com o que t pode se parecer: t pode ser uma letra, ou pode ser $[s_1 \circ s_2]$ para algum par de termos bonitos s_1 e s_2 . Por causa da cláusula (3), essas são as únicas possibilidades.

Ao provar afirmações sobre todo um conjunto definido indutivamente, a forma forte da indução torna-se particularmente importante. Por exemplo, suponha que queiramos provar que, para todo termo bonito de comprimento n , o número de $[$ nele é $< n/2$. Isso pode ser visto como uma afirmação sobre todos os n : para todo n , o número de $[$ em qualquer termo bonito de comprimento n é $< n/2$.

Proposição ind.2. *Para qualquer n , o número de $[$ em um termo bonito de comprimento n é $< n/2$.*

Prova. Para provar esse resultado por indução (forte), temos que mostrar que a seguinte afirmação condicional é verdadeira:

Se, para todo $l < k$, qualquer termo bonito de comprimento l tem $< l/2$ $[$, então qualquer termo bonito de comprimento k tem $< k/2$ $[$.

Para mostrar este condicional, suponha que seu antecedente é verdadeiro, isto é, suponha que, para qualquer $l < k$, termos bonitos de comprimento l contêm $< l/2$ $[$. Chamamos essa suposição de hipótese indutiva. Queremos mostrar que o mesmo vale para termos bonitos de comprimento k .

Então suponha que t é um termo bonito de comprimento k . Como os termos bonitos são definidos indutivamente, temos dois casos: (1) t é uma letra isolada, ou (2) t é $[s_1 \circ s_2]$ para alguns termos bonitos s_1 e s_2 .

1. t é uma letra. Então $k = 1$, e o número de $[$ em t é 0. Como $0 < 1/2$, a afirmação vale.
2. t é $[s_1 \circ s_2]$ para alguns termos bonitos s_1 e s_2 . Sejam l_1 o comprimento de s_1 e l_2 o comprimento de s_2 . Então o comprimento k de t é $l_1 + l_2 + 3$ (os comprimentos de s_1 e s_2 mais três símbolos $[$, $\circ$, $]$). Como $l_1 + l_2 + 3$ é sempre maior que l_1 , $l_1 < k$. De modo semelhante, $l_2 < k$. Isso significa que a hipótese de indução se aplica aos termos s_1 e s_2 : o número m_1 de $[$ em s_1 é $< l_1/2$, e o número m_2 de $[$ em s_2 é $< l_2/2$.

O número de $[$ em t é o número de $[$ em s_1 , mais o número de $[$ em s_2 , mais 1, isto é, é $m_1 + m_2 + 1$. Como $m_1 < l_1/2$ e $m_2 < l_2/2$, temos:

$$m_1 + m_2 + 1 < \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2} + 1 = \frac{l_1 + l_2 + 2}{2} < \frac{l_1 + l_2 + 3}{2} = k/2.$$

Em cada caso, mostramos que o número de $[$ em t é $< k/2$ (com base na hipótese indutiva). Por indução forte, a proposição se segue. $\square$

Problema ind.1. Defina o conjunto dos termos superbonitos por

1. Qualquer letra a, b, c, d é um termo superbonito.
2. Se s é um termo superbonito, então também o é $[s]$.
3. Se s_1 e s_2 são termos superbonitos, então também o é $[s_1 \circ s_2]$.
4. Nada mais é um termo superbonito.

Mostre que o número de $[$ em um termo superbonito t de comprimento n é $\leq n/2 + 1$.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas