

udf Indução

ind.1 Introdução

math:ind:int:
sec

A indução é uma técnica de prova importante, usada, em diferentes formas, em quase todas as áreas da lógica, da ciência da computação teórica e da matemática. Ela é necessária para provar muitos dos resultados em lógica.

A indução é frequentemente contrastada com a dedução, e caracterizada como a inferência do particular para o geral. Por exemplo, se observamos muitas esmeraldas verdes, e nada que chamaríamos de esmeralda que não seja verde, poderíamos concluir que todas as esmeraldas são verdes. Essa é uma inferência indutiva, no sentido de que procede de muitos casos particulares (esta esmeralda é verde, aquela esmeralda é verde, etc.) a uma afirmação geral (todas as esmeraldas são verdes). A indução *matemática* também é uma inferência que conclui uma afirmação geral, mas é de um tipo muito diferente dessa “indução simples.”

De modo bem aproximado, uma prova indutiva em matemática conclui que todos os objetos matemáticos de certo tipo têm uma certa propriedade. No caso mais simples, os objetos matemáticos com que uma prova indutiva se ocupa são os números naturais. Nesse caso, uma prova indutiva é usada para estabelecer que todos os números naturais têm alguma propriedade, e faz isso mostrando que

1. 0 tem a propriedade, e
2. sempre que um número k tem a propriedade, também $k + 1$ a tem.

A indução sobre os números naturais pode então, também, ser frequentemente usada para provar afirmações gerais sobre objetos matemáticos aos quais se podem atribuir números. Por exemplo, conjuntos finitos têm, cada um, um número finito n de elementos, e se pudermos usar a indução para mostrar que todo número n tem a propriedade “todos os conjuntos finitos de tamanho n são ...” então teremos mostrado algo sobre todos os conjuntos finitos.

A indução também pode ser generalizada para objetos matemáticos que são *definidos indutivamente*. Por exemplo, as expressões de uma linguagem formal, como as da lógica de primeira ordem, são definidas indutivamente. A *indução estrutural* é um modo de provar resultados sobre todas essas expressões. A indução estrutural, em particular, é muito útil—e amplamente usada—em lógica.

ind.2 Indução em $\mathbb{N}$

math:ind:inN:
sec

Em sua forma mais simples, a indução é uma técnica usada para provar resultados para todos os números naturais. Ela usa o fato de que, começando em 0 e somando 1 repetidamente, eventualmente alcançamos todo número natural. Assim, para provar que algo é verdadeiro para todo número, podemos (1) estabelecer que é verdadeiro para 0 e (2) mostrar que, sempre que é verdadeiro

para um número n , também é verdadeiro para o número seguinte $n + 1$. Se abreviarmos “o número n tem a propriedade P ” por $P(n)$ (e “o número k tem a propriedade P ” por $P(k)$, etc.), então uma prova por indução de que $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ consiste em:

1. uma prova de $P(0)$, e
2. uma prova de que, para qualquer k , se $P(k)$ então $P(k + 1)$.

Para deixar isso bem claro, suponha que tenhamos tanto (1) quanto (2). Então (1) nos diz que $P(0)$ é verdadeiro. Se também tivermos (2), sabemos em particular que, se $P(0)$, então $P(0 + 1)$, isto é, $P(1)$. Isso decorre da afirmação geral “para qualquer k , se $P(k)$ então $P(k + 1)$ ” ao pôr 0 no lugar de k . Então, por modus ponens, temos que $P(1)$. De (2) novamente, agora tomando 1 por n , temos: se $P(1)$ então $P(2)$. Como acabamos de estabelecer $P(1)$, por modus ponens, temos $P(2)$. E assim por diante. Para qualquer número n , depois de fazer isso n vezes, eventualmente chegamos a $P(n)$. Então (1) e (2) juntos estabelecem $P(n)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Vejam um exemplo. Suponha que queiramos descobrir quantas somas diferentes podemos lançar com n dados. Embora possa parecer bobo, vamos começar com 0 dados. Se você não tem dados, há apenas uma soma possível que você pode “lançar”: nenhum ponto, que soma 0. Assim, o número de lançamentos possíveis diferentes é 1. Se você tem apenas um dado, isto é, $n = 1$, há seis valores possíveis, de 1 a 6. Com dois dados, podemos lançar qualquer soma de 2 a 12, ou seja, 11 possibilidades. Com três dados, podemos lançar qualquer número de 3 a 18, isto é, 16 possibilidades diferentes. 1, 6, 11, 16: parece um padrão: talvez a resposta seja $5n + 1$? É claro que $5n + 1$ é o máximo possível, pois há apenas $5n + 1$ números entre n , o menor valor que você pode lançar com n dados (todos 1) e $6n$, o maior que você pode lançar (todos 6).

Teorema ind.1. *Com n dados pode-se lançar todos os $5n + 1$ valores possíveis entre n e $6n$.*

Prova. Seja $P(n)$ a afirmação: “É possível lançar qualquer número entre n e $6n$ usando n dados.” Para usar a indução, provamos:

1. A *base da indução* $P(1)$, isto é, com apenas um dado, você pode lançar qualquer número entre 1 e 6.
2. O *passo da indução*, para todo k , se $P(k)$ então $P(k + 1)$.

(1) é provado inspecionando um dado de 6 lados. Ele tem todos os 6 lados, e todo número entre 1 e 6 aparece em um dos lados. Então é possível lançar qualquer número entre 1 e 6 usando um único dado.

Para provar (2), supomos o antecedente do condicional, isto é, $P(k)$. Essa suposição é chamada de *hipótese indutiva*. Nós a usamos para provar $P(k + 1)$. A parte difícil é encontrar um modo de pensar sobre os valores possíveis de

um lançamento de $k + 1$ dados em termos dos valores possíveis de lançamentos de k dados, somados aos lançamentos do dado extra, o $(k + 1)$ -ésimo—é isso, porém, que temos que fazer, se quisermos usar a hipótese indutiva.

A hipótese indutiva diz que podemos obter qualquer número entre k e $6k$ usando k dados. Se lançamos um 1 com nosso $(k + 1)$ -ésimo dado, isso acrescenta 1 ao total. Então podemos lançar qualquer valor entre $k + 1$ e $6k + 1$ lançando k dados e depois rolando um 1 com o $(k + 1)$ -ésimo dado. O que falta? Os valores de $6k + 2$ a $6k + 6$. Podemos obtê-los rolando k dados em 6 e depois um número entre 2 e 6 com nosso $(k + 1)$ -ésimo dado. Juntos, isso significa que, com $k + 1$ dados, podemos lançar qualquer um dos números entre $k + 1$ e $6(k + 1)$, isto é, provamos $P(k + 1)$ usando a suposição $P(k)$, a hipótese indutiva. $\square$

Muito frequentemente usamos a indução quando queremos provar algo sobre uma série de objetos (números, conjuntos, etc.) que é, ela própria, definida “indutivamente,” isto é, definindo o $(n + 1)$ -ésimo objeto em termos do n -ésimo. Por exemplo, podemos definir a soma s_n dos números naturais até n por

$$\begin{aligned}s_0 &= 0 \\ s_{n+1} &= s_n + (n + 1)\end{aligned}$$

Esta definição dá:

$$\begin{aligned}s_0 &= 0, \\ s_1 &= s_0 + 1 &= 1, \\ s_2 &= s_1 + 2 &= 1 + 2 = 3 \\ s_3 &= s_2 + 3 &= 1 + 2 + 3 = 6, \text{ etc.}\end{aligned}$$

Agora podemos provar, por indução, que $s_n = n(n + 1)/2$.

Proposição ind.2. $s_n = n(n + 1)/2$.

Prova. Temos que provar (1) que $s_0 = 0 \cdot (0 + 1)/2$ e (2) se $s_k = k(k + 1)/2$ então $s_{k+1} = (k + 1)(k + 2)/2$. (1) é óbvio. Para provar (2), supomos a hipótese indutiva: $s_k = k(k + 1)/2$. Usando-a, temos que mostrar que $s_{k+1} = (k + 1)(k + 2)/2$.

O que é s_{k+1} ? Pela definição, $s_{k+1} = s_k + (k + 1)$. Pela hipótese indutiva, $s_k = k(k + 1)/2$. Podemos substituir isso na equação anterior, e então só precisamos de um pouco de aritmética de frações:

$$\begin{aligned}s_{k+1} &= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \\ &= \frac{k(k + 1)}{2} + \frac{2(k + 1)}{2} = \\ &= \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} = \\ &= \frac{(k + 2)(k + 1)}{2}.\end{aligned}\quad \square$$

A lição importante aqui é que, se você está provando algo sobre alguma sequência definida indutivamente a_n , a indução é o caminho óbvio a seguir. E, mesmo quando não é (como no caso das possibilidades de lançamentos de dados), você pode usar a indução se conseguir, de alguma forma, relacionar o caso para $k + 1$ ao caso para k .

ind.3 Indução Forte

No princípio de indução discutido acima, provamos $P(0)$ e também que, se $P(k)$, então $P(k + 1)$. Na segunda parte, assumimos que $P(k)$ é verdadeiro e usamos essa suposição para provar $P(k + 1)$. De forma equivalente, é claro, poderíamos assumir $P(k - 1)$ e usá-la para provar $P(k)$ —o importante é que sejamos capazes de realizar a inferência de qualquer número para seu sucessor; que possamos provar a afirmação em questão para qualquer número sob a suposição de que ela vale para seu antecessor.

Há uma variante do princípio de indução em que não apenas assumimos que a afirmação vale para o antecessor $k - 1$ de k , mas para todos os números menores que k , e usamos essa suposição para estabelecer a afirmação para k . Isso também nos dá a afirmação $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pois, uma vez que tenhamos estabelecido $P(0)$, teremos com isso estabelecido que P vale para todos os números menores que 1. E se sabemos que, se $P(l)$ para todo $l < k$, então $P(k)$, sabemos isso em particular para $k = 1$. Então podemos concluir $P(1)$. Com isso provamos $P(0)$ e $P(1)$, isto é, $P(l)$ para todo $l < 2$, e como temos também o condicional, se $P(l)$ para todo $l < 2$, então $P(2)$, podemos concluir $P(2)$, e assim por diante.

De fato, se conseguirmos estabelecer o condicional geral “para todo k , se $P(l)$ para todo $l < k$, então $P(k)$,” não temos mais de estabelecer $P(0)$, já que ele decorre disso. Pois lembre-se de que uma afirmação geral como “para todo $l < k$, $P(l)$ ” é verdadeira se não houver nenhum $l < k$. Este é um caso de quantificação vazia: “todos os A s são B s” é verdadeiro se não houver nenhum A , $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ é verdadeiro se nenhum x satisfaz $\varphi(x)$. Neste caso, a versão formalizada seria “ $\forall l (l < k \rightarrow P(l))$ ”—e isso é verdadeiro se não houver nenhum $l < k$. E se $k = 0$ esse é exatamente o caso: não há nenhum $l < 0$, logo “para todo $l < 0$, $P(l)$ ” é verdadeiro, qualquer que seja P . Uma prova de “se $P(l)$ para todo $l < k$, então $P(k)$ ” estabelece assim automaticamente $P(0)$.

Esta variante é útil se estabelecer a afirmação para k não puder ser feito de modo a apenas se apoiar na afirmação para $k - 1$, mas puder exigir a suposição de que ela é verdadeira para um ou mais $l < k$.

ind.4 Definições Indutivas

Em lógica, muito frequentemente definimos tipos de objetos *indutivamente*, isto é, especificando regras para o que conta como um objeto do tipo a ser definido, que explicam como obter novos objetos desse tipo a partir de objetos antigos desse tipo. Por exemplo, frequentemente definimos tipos especiais de

seqüências de símbolos, como os termos e fórmulas de uma linguagem, por indução. Para um exemplo simples, considere cadeias compostas das letras a, b, c, d , do símbolo $\circ$, e dos colchetes $[\text{ e }]$, como $[[c \circ d]]$, $[a[\circ]]$, a ou $[[a \circ b] \circ d]$. Você provavelmente sente que há algo “errado” com as duas primeiras cadeias: os colchetes não “se equilibram” de modo algum na primeira, e você pode sentir que o “ $\circ$ ” deveria “conectar” expressões que elas próprias façam sentido. A terceira e a quarta cadeia parecem melhores: para todo “[” há um “]” de fechamento (se houver algum), e para qualquer $\circ$ podemos encontrar expressões “bonitas” de cada lado, cercadas por um par de parênteses.

Gostaríamos de especificar precisamente o que conta como um “termo bonito.” Em primeiro lugar, toda letra isolada é bonita. Qualquer coisa que não seja apenas uma letra isolada deve ser da forma $[t \circ s]$ em que s e t são, eles próprios, bonitos. Reciprocamente, se t e s são bonitos, então podemos formar um novo termo bonito pondo um $\circ$ entre eles e cercado-os por um par de colchetes. Poderíamos usar essas operações para *definir* o conjunto dos termos bonitos. Esta é uma *definição indutiva*.

Definição ind.3 (Termos bonitos). O conjunto dos *termos bonitos* é definido indutivamente como segue:

1. Qualquer letra a, b, c, d é um termo bonito.
2. Se s_1 e s_2 são termos bonitos, então também $\circ$ é $[s_1 \circ s_2]$.
3. Nada mais é um termo bonito.

Esta definição nos diz que algo conta como um termo bonito sse ele pode ser construído de acordo com as duas condições (1) e (2) em algum número finito de passos. No primeiro passo, construímos todos os termos bonitos compostos apenas por letras isoladas, isto é,

$$a, b, c, d$$

No segundo passo, aplicamos (2) aos termos que construímos. Obteremos

$$[a \circ a], [a \circ b], [b \circ a], \dots, [d \circ d]$$

para todas as combinações de duas letras. No terceiro passo, aplicamos (2) novamente, a quaisquer dois termos bonitos que construímos até agora. Obtemos novos termos bonitos como $[a \circ [a \circ a]]$ —em que t é a do passo 1 e s é $[a \circ a]$ do passo 2—e $[[b \circ c] \circ [d \circ b]]$ construído a partir dos dois termos $[b \circ c]$ e $[d \circ b]$ do passo 2. E assim por diante. A cláusula (3) impede que qualquer coisa não construída desse modo se infiltre no conjunto dos termos bonitos.

Note que ainda não provamos que toda seqüência de símbolos que “parece” bonita é bonita de acordo com esta definição. No entanto, deve ficar claro que tudo o que podemos construir de fato “parece bonito”: os colchetes estão equilibrados, e $\circ$ conecta partes que são, elas próprias, bonitas.

A característica-chave das definições indutivas é que, se você quer provar algo sobre todos os termos bonitos, a definição lhe diz quais casos você deve

considerar. Por exemplo, se lhe é dito que t é um termo bonito, a definição indutiva lhe diz com o que t pode se parecer: t pode ser uma letra, ou pode ser $[s_1 \circ s_2]$ para algum par de termos bonitos s_1 e s_2 . Por causa da cláusula (3), essas são as únicas possibilidades.

Ao provar afirmações sobre todo um conjunto definido indutivamente, a forma forte da indução torna-se particularmente importante. Por exemplo, suponha que queiramos provar que, para todo termo bonito de comprimento n , o número de $[$ nele é $< n/2$. Isso pode ser visto como uma afirmação sobre todos os n : para todo n , o número de $[$ em qualquer termo bonito de comprimento n é $< n/2$.

Proposição ind.4. *Para qualquer n , o número de $[$ em um termo bonito de comprimento n é $< n/2$.*

Prova. Para provar esse resultado por indução (forte), temos que mostrar que a seguinte afirmação condicional é verdadeira:

Se, para todo $l < k$, qualquer termo bonito de comprimento l tem $< l/2$ $[$, então qualquer termo bonito de comprimento k tem $< k/2$ $[$.

Para mostrar este condicional, suponha que seu antecedente é verdadeiro, isto é, suponha que, para qualquer $l < k$, termos bonitos de comprimento l contêm $< l/2$ $[$. Chamamos essa suposição de hipótese indutiva. Queremos mostrar que o mesmo vale para termos bonitos de comprimento k .

Então suponha que t é um termo bonito de comprimento k . Como os termos bonitos são definidos indutivamente, temos dois casos: (1) t é uma letra isolada, ou (2) t é $[s_1 \circ s_2]$ para alguns termos bonitos s_1 e s_2 .

1. t é uma letra. Então $k = 1$, e o número de $[$ em t é 0. Como $0 < 1/2$, a afirmação vale.
2. t é $[s_1 \circ s_2]$ para alguns termos bonitos s_1 e s_2 . Sejam l_1 o comprimento de s_1 e l_2 o comprimento de s_2 . Então o comprimento k de t é $l_1 + l_2 + 3$ (os comprimentos de s_1 e s_2 mais três símbolos $[$, $\circ$, $]$). Como $l_1 + l_2 + 3$ é sempre maior que l_1 , $l_1 < k$. De modo semelhante, $l_2 < k$. Isso significa que a hipótese de indução se aplica aos termos s_1 e s_2 : o número m_1 de $[$ em s_1 é $< l_1/2$, e o número m_2 de $[$ em s_2 é $< l_2/2$.

O número de $[$ em t é o número de $[$ em s_1 , mais o número de $[$ em s_2 , mais 1, isto é, é $m_1 + m_2 + 1$. Como $m_1 < l_1/2$ e $m_2 < l_2/2$, temos:

$$m_1 + m_2 + 1 < \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2} + 1 = \frac{l_1 + l_2 + 2}{2} < \frac{l_1 + l_2 + 3}{2} = k/2.$$

Em cada caso, mostramos que o número de $[$ em t é $< k/2$ (com base na hipótese indutiva). Por indução forte, a proposição se segue. $\square$

Problema ind.1. Defina o conjunto dos termos superbonitos por

1. Qualquer letra a, b, c, d é um termo superbonito.
2. Se s é um termo superbonito, então também o é $[s]$.
3. Se s_1 e s_2 são termos superbonitos, então também o é $[s_1 \circ s_2]$.
4. Nada mais é um termo superbonito.

Mostre que o número de $[$ em um termo superbonito t de comprimento n é $\leq n/2 + 1$.

ind.5 Indução Estrutural

math:ind:sti:
sec

Até aqui usamos a indução para estabelecer resultados sobre todos os números naturais. Mas um princípio correspondente pode ser usado diretamente para provar resultados sobre todos os **membros** de um conjunto definido indutivamente. Isso é frequentemente chamado de indução *estrutural*, porque depende da estrutura dos objetos definidos indutivamente.

Em geral, uma definição indutiva é dada por (a) uma lista de **membros** “iniciais” do conjunto e (b) uma lista de operações que produzem novos **membros** do conjunto a partir de antigos. No caso dos termos bonitos, por exemplo, os objetos iniciais são as letras. Temos apenas uma operação: as operações são

$$o(s_1, s_2) = [s_1 \circ s_2]$$

Você pode até pensar nos próprios números naturais $\mathbb{N}$ como sendo dados por uma definição indutiva: o objeto inicial é 0, e a operação é a função sucessor $x + 1$.

Para provar algo sobre todos os elementos de um conjunto definido indutivamente, isto é, que todo **membro** do conjunto tem uma propriedade P , devemos:

1. Provar que os objetos iniciais têm P
2. Provar que, para cada operação o , se os argumentos têm P , o resultado também tem.

Por exemplo, para provar algo sobre todos os termos bonitos, nós provaríamos que é verdadeiro para todas as letras, e que é verdadeiro para $[s_1 \circ s_2]$ desde que seja verdadeiro de s_1 e s_2 individualmente.

Proposição ind.5. *O número de $[$ é igual ao número de $]$ em qualquer termo bonito t .*

Prova. Usamos a indução estrutural. Os termos bonitos são definidos indutivamente, com as letras como objetos iniciais e a operação o para construir novos termos bonitos a partir de antigos.

1. A afirmação é verdadeira para toda letra, já que o número de $[$ em uma letra isolada é 0 e o número de $]$ nela também é 0.

2. Suponha que o número de $[$ em s_1 é igual ao número de $]$, e o mesmo é verdadeiro para s_2 . O número de $[$ em $o(s_1, s_2)$, isto é, em $[s_1 \circ s_2]$, é a soma do número de $[$ em s_1 e s_2 mais um. O número de $]$ em $o(s_1, s_2)$ é a soma do número de $]$ em s_1 e s_2 mais um. Assim, o número de $[$ em $o(s_1, s_2)$ é igual ao número de $]$ em $o(s_1, s_2)$. $\square$

Problema ind.2. Prove, por indução estrutural, que nenhum termo bonito começa com $]$.

Vamos dar outra prova por indução estrutural: um segmento inicial próprio de uma cadeia t de símbolos é qualquer cadeia s que concorda com t símbolo por símbolo, lida da esquerda, mas t é mais longa. Assim, por exemplo, $[a \circ$ é um segmento inicial próprio de $[a \circ b]$, mas nem $[b \circ$ (discordam no segundo símbolo) nem $[a \circ b]$ (têm o mesmo comprimento) o são.

Proposição ind.6. *Todo segmento inicial próprio de um termo bonito t tem mais $[$ do que $]$.* mth:ind:sti:prop:initial

Prova. Por indução em t :

1. t é uma letra isolada: Então t não tem segmentos iniciais próprios.
2. $t = [s_1 \circ s_2]$ para alguns termos bonitos s_1 e s_2 . Se r é um segmento inicial próprio de t , há várias possibilidades:
 - a) r é apenas $[$: Então r tem um $[$ a mais do que $]$.
 - b) r é $[r_1$ em que r_1 é um segmento inicial próprio de s_1 : Como s_1 é um termo bonito, por hipótese de indução, r_1 tem mais $[$ do que $]$, e o mesmo é verdadeiro para $[r_1$.
 - c) r é $[s_1$ ou $[s_1 \circ$: Pelo resultado anterior, o número de $[$ e $]$ em s_1 é igual; então o número de $[$ em $[s_1$ ou $[s_1 \circ$ é um a mais do que o número de $]$.
 - d) r é $[s_1 \circ r_2$ em que r_2 é um segmento inicial próprio de s_2 : Por hipótese de indução, r_2 contém mais $[$ do que $]$. Pelo resultado anterior, o número de $[$ e de $]$ em s_1 é igual. Então o número de $[$ em $[s_1 \circ r_2$ é maior do que o número de $]$.
 - e) r é $[s_1 \circ s_2$: Pelo resultado anterior, o número de $[$ e $]$ em s_1 é igual, e o mesmo para s_2 . Então há um $[$ a mais em $[s_1 \circ s_2$ do que há. $\square$

ind.6 Relações e Funções

Quando definimos um conjunto de objetos (como os números naturais ou os termos bonitos) indutivamente, também podemos definir *relações sobre* esses objetos por indução. Por exemplo, considere a seguinte ideia: um termo bonito t_1 é um subtermo de um termo bonito t_2 se ocorre como parte dele. Vamos

usar um símbolo para isso: $t_1 \sqsubseteq t_2$. Todo termo bonito é, é claro, um subtermo de si mesmo: $t \sqsubseteq t$. Podemos dar uma definição indutiva dessa relação como segue:

Definição ind.7. A relação de um termo bonito t_1 ser um subtermo de t_2 , $t_1 \sqsubseteq t_2$, é definida por indução em t_2 como segue:

1. Se t_2 é uma letra, então $t_1 \sqsubseteq t_2$ sse $t_1 = t_2$.
2. Se t_2 é $[s_1 \circ s_2]$, então $t_1 \sqsubseteq t_2$ sse $t_1 = t_2$, $t_1 \sqsubseteq s_1$, ou $t_1 \sqsubseteq s_2$.

Esta definição, por exemplo, nos dirá que $a \sqsubseteq [b \circ a]$. Pois (2) diz que $a \sqsubseteq [b \circ a]$ sse $a = [b \circ a]$, ou $a \sqsubseteq b$, ou $a \sqsubseteq a$. As duas primeiras são falsas: a claramente não é idêntico a $[b \circ a]$, e por (1), $a \sqsubseteq b$ sse $a = b$, o que também é falso. No entanto, também por (1), $a \sqsubseteq a$ sse $a = a$, o que é verdadeiro.

É importante observar que o sucesso desta definição depende de um fato que ainda não provamos: todo termo bonito t ou é uma letra isolada, ou existem termos bonitos *univocamente determinados* s_1 e s_2 tais que $t = [s_1 \circ s_2]$. “Univocamente determinados” aqui significa que, se $t = [s_1 \circ s_2]$, ele não é *também* $= [r_1 \circ r_2]$ com $s_1 \neq r_1$ ou $s_2 \neq r_2$. Se este fosse o caso, então a cláusula (2) poderia entrar em conflito consigo mesma: lendo t_2 como $[s_1 \circ s_2]$ poderíamos obter $t_1 \sqsubseteq t_2$, mas se lermos t_2 como $[r_1 \circ r_2]$ poderíamos obter não $t_1 \sqsubseteq t_2$. Antes de provarmos que isso não pode acontecer, vejamos um exemplo em que ele *pode* acontecer.

Definição ind.8. Defina *termos sem colchetes* indutivamente por

1. Toda letra é um termo sem colchetes.
2. Se s_1 e s_2 são termos sem colchetes, então $s_1 \circ s_2$ é um termo sem colchetes.
3. Nada mais é um termo sem colchetes.

Termos sem colchetes são, por exemplo, a , $b \circ d$, $b \circ a \circ b$. Agora, se definíssemos “subtermo” para termos sem colchetes do modo como fizemos acima, a segunda cláusula diria

Se $t_2 = s_1 \circ s_2$, então $t_1 \sqsubseteq t_2$ sse $t_1 = t_2$, $t_1 \sqsubseteq s_1$, ou $t_1 \sqsubseteq s_2$.

Agora, $b \circ a \circ b$ é da forma $s_1 \circ s_2$ com

$$s_1 = b \text{ e}$$

$$s_2 = a \circ b.$$

Ele também é da forma $r_1 \circ r_2$ com

$$r_1 = b \circ a \text{ e}$$

$$r_2 = b.$$

Agora, $a \circ b$ é um subtermo de $b \circ a \circ b$? A resposta é sim, se seguirmos a primeira leitura, e não, se seguirmos a segunda.

A propriedade de que o modo como um termo bonito é construído a partir de outros termos bonitos é único é chamada de *leitura única*. Como definições indutivas de relações para tais objetos definidos indutivamente são importantes, temos que provar que ela vale.

Proposição ind.9. *Suponha que t é um termo bonito. Então ou t é uma letra isolada, ou existem termos bonitos univocamente determinados s_1, s_2 tais que $t = [s_1 \circ s_2]$.*

Prova. Se t é uma letra isolada, a condição é satisfeita. Então suponha que t não é uma letra isolada. Podemos perceber, pela definição indutiva, que então t deve ser da forma $[s_1 \circ s_2]$ para alguns termos bonitos s_1 e s_2 . Resta mostrar que estes são univocamente determinados, isto é, se $t = [r_1 \circ r_2]$, então $s_1 = r_1$ e $s_2 = r_2$.

Então suponha $t = [s_1 \circ s_2]$ e também $t = [r_1 \circ r_2]$ para termos bonitos s_1, s_2, r_1, r_2 . Temos que mostrar que $s_1 = r_1$ e $s_2 = r_2$. Primeiro, s_1 e r_1 devem ser idênticos, pois, caso contrário, um é um segmento inicial próprio do outro. Mas, por **Proposição ind.6**, isso é impossível se s_1 e r_1 são ambos termos bonitos. Mas se $s_1 = r_1$, então claramente também $s_2 = r_2$. $\square$

Também podemos definir funções indutivamente: por exemplo, podemos definir a função f que mapeia qualquer termo bonito na profundidade máxima de aninhamento de $[\dots]$ nele como segue:

Definição ind.10. A *profundidade* de um termo bonito, $f(t)$, é definida indutivamente como segue:

[mth:ind:rel:](#)
[defn:depth](#)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \text{ é uma letra} \\ \max(f(s_1), f(s_2)) + 1 & \text{se } t = [s_1 \circ s_2]. \end{cases}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} f([a \circ b]) &= \max(f(a), f(b)) + 1 = \\ &= \max(0, 0) + 1 = 1, \text{ e} \\ f([(a \circ b) \circ c]) &= \max(f([a \circ b]), f(c)) + 1 = \\ &= \max(1, 0) + 1 = 2. \end{aligned}$$

Aqui, é claro, supomos que s_1 e s_2 são termos bonitos, e fazemos uso do fato de que todo termo bonito ou é uma letra ou é da forma $[s_1 \circ s_2]$. É novamente importante que ele possa ser dessa forma de apenas um modo. Para ver por quê, considere novamente os termos sem colchetes que definimos antes. A “definição” correspondente seria:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \text{ é uma letra} \\ \max(g(s_1), g(s_2)) + 1 & \text{se } t = s_1 \circ s_2. \end{cases}$$

Agora considere o termo sem colchetes $a \circ b \circ c \circ d$. Ele pode ser lido de mais de um modo, por exemplo, como $s_1 \circ s_2$ com

$$s_1 = a \text{ e } s_2 = b \circ c \circ d,$$

ou como $r_1 \circ r_2$ com

$$r_1 = a \circ b \text{ e } r_2 = c \circ d.$$

Calcular g de acordo com o primeiro modo de lê-lo daria

$$\begin{aligned} g(s_1 \circ s_2) &= \max(g(a), g(b \circ c \circ d)) + 1 = \\ &= \max(0, 2) + 1 = 3 \end{aligned}$$

enquanto, de acordo com a outra leitura, obtemos

$$\begin{aligned} g(r_1 \circ r_2) &= \max(g(a \circ b), g(c \circ d)) + 1 = \\ &= \max(1, 1) + 1 = 2 \end{aligned}$$

Mas uma função deve sempre produzir um valor único; então nossa “definição” de g não define função alguma.

Problema ind.3. Dê uma definição indutiva da função l , em que $l(t)$ é o número de símbolos no termo bonito t .

Problema ind.4. Prove, por indução estrutural sobre termos bonitos t , que $f(t) < l(t)$ (em que $l(t)$ é o número de símbolos em t e $f(t)$ é a profundidade de t tal como definida em [Definição ind.10](#)).

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas