

Capítulo udf

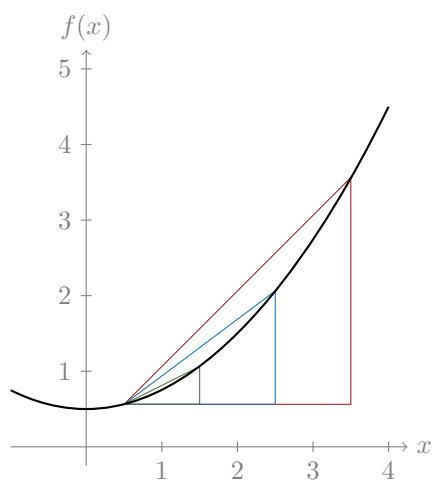
História e Mitologia da Teoria dos Conjuntos

This chapter includes the historical prelude from Tim Button’s Open Set Theory text.

set.1 Infinitesimais e Diferenciação

[his:set:infinitesimals:](#) Newton e Leibniz descobriram o cálculo (independentemente) no fim do século XVII. Uma aplicação particularmente importante do cálculo era a *diferenciação*. Grosso modo, a diferenciação pretende dar uma noção da “taxa de variação”, ou gradiente, de uma função num ponto.

Eis uma forma vívida de ilustrar a ideia. Considere a função $f(x) = x^2/4 + 1/2$, representada a preto abaixo:



Suponhamos que queremos encontrar o gradiente da função em $c = 1/2$. Começamos por desenhar um triângulo cuja hipotenusa aproxima o gradiente nesse ponto, talvez o triângulo vermelho acima. Quando β é o comprimento da base do nosso triângulo, a sua altura é $f(1/2 + \beta) - f(1/2)$, de modo que o gradiente da hipotenusa é:

$$\frac{f(1/2 + \beta) - f(1/2)}{\beta}.$$

Assim, o gradiente do nosso triângulo **vermelho**, com base de comprimento 3, é exatamente 1. A hipotenusa de um triângulo menor, o triângulo **azul** com base de comprimento 2, dá uma melhor aproximação; o seu gradiente é $3/4$. Um triângulo ainda menor, o **verde** com base de comprimento 1, dá uma aproximação ainda melhor, com gradiente $1/2$.

Triângulos cada vez menores dão-nos aproximações cada vez melhores. Por isso poderíamos dizer algo deste gênero: a hipotenusa de um triângulo com comprimento de base *infinitesimal* nos dá o próprio gradiente em $c = 1/2$. Deste modo, obteríamos uma fórmula para a (primeira) derivada da função f no ponto c :

$$f'(c) = \frac{f(c + \beta) - f(c)}{\beta} \text{ onde } \beta \text{ é infinitesimal.}$$

E, grosso modo, foi isto que Newton e Leibniz disseram.

Contudo, uma vez que o disseram, devemos perguntar-lhes: o que é um *infinitesimal*? Surge um dilema sério. Se $\beta = 0$, então f' fica mal definida, pois envolve dividir por 0. Mas se $\beta > 0$, obtemos apenas uma *aproximação* ao gradiente, e não o próprio gradiente.

Esta não é uma preocupação anacrônica. Eis Berkeley, a criticar os seguidores de Newton:

Admito que os signos possam ser feitos para denotar qualquer coisa ou nada: e conseqüentemente que, na notação original $c + \beta$, β poderia ter significado um incremento ou nada. Mas então, seja qual for o significado atribuído a β , é preciso argumentar de modo consistente com essa significação, e não proceder com duplo sentido: o que seria um sofismo manifesto. (**Berkeley 1734**, §XIII, variáveis alteradas para coincidir com o texto precedente)

Para defender o cálculo infinitesimal face a Berkeley, poder-se-ia responder que a linguagem dos “infinitesimais” é meramente figurada. Poder-se-ia dizer que, desde que tomemos um triângulo *bem pequeno*, obteremos uma aproximação *suficientemente boa* à tangente. Berkeley tinha também uma resposta para isto: embora isso pudesse bastar para a engenharia, minava o *estatuto* da matemática, pois

dizem-nos que *in rebus mathematicis errores quàm minimi non sunt contemnendi*. [No caso da matemática, os menores erros não devem ser desprezados.] (**Berkeley**, 1734, §IX)

A passagem em itálico é uma citação quase literal do próprio Newton na *Quadrature of Curves* (1704).

As objeções filosóficas de Berkeley são profundamente incisivas. Não obstante, o cálculo foi uma empresa enormemente bem-sucedida, e os matemáticos continuaram a usá-lo sem incorrer em erro.

set.2 Definição Rigorosa de Limites

his:set:limits:sec Hoje em dia, a solução padrão ao problema anterior é livrar-se dos infinitesimais. Eis como.

Já vimos que, à medida que β fica menor, obtemos melhores aproximações do gradiente. De fato, à medida que β se aproxima arbitrariamente de 0, o valor de $f'(c)$ “tende sem limite” para o gradiente que queremos. Assim, em vez de considerar o que acontece *em* $\beta = 0$, precisamos apenas considerar a *tendência* de $f'(c)$ quando β se aproxima de 0.

Posto deste modo, o desafio geral é dar sentido a afirmações desta forma:

À medida que x se aproxima de c , $g(x)$ tende sem limite para ℓ .

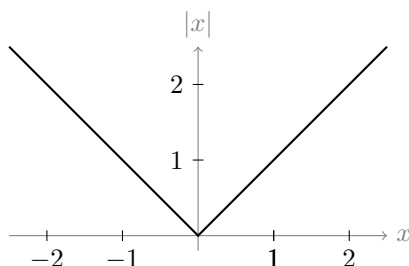
que podemos escrever de forma mais compacta assim:

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell.$$

No século XIX, sobre trabalho anterior de Cauchy, Weierstrass deu uma definição perfeitamente rigorosa desta expressão. A ideia é, de fato, que podemos tornar $g(x)$ tão próxima quanto queiramos de ℓ , tornando x adequadamente próximo de c . Mais precisamente, estipulamos que $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell$ significará:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \forall x (|x - c| < \delta \rightarrow |g(x) - \ell| < \varepsilon).$$

As barras verticais indicam aqui valor absoluto. Isto é, $|x| = x$ quando $x \geq 0$, e $|x| = -x$ quando $x < 0$; pode representar-se *essa* função como se segue:



A definição diz portanto, grosso modo, o seguinte: pode tornar o seu “erro” inferior a ε (isto é, $|g(x) - \ell| < \varepsilon$) escolhendo argumentos que distem no máximo δ de c (isto é, $|x - c| < \delta$).

Tendo definido a noção de limite, podemos usá-la para evitar por completo os infinitesimais, estipulando que o gradiente de f em c é dado por:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(c+x) - f(c)}{x} \right) \text{ quando um limite existe.}$$

É importante, no entanto, compreender por que a nossa definição precisa da ressalva “quando um limite existe”. Para um exemplo simples, considere $f(x) = |x|$, cujo gráfico acabamos de ver. Evidentemente, $f'(0)$ está mal definida: se nos aproximamos de 0 “pela direita”, o gradiente é sempre 1; se nos aproximamos “pela esquerda”, o gradiente é sempre -1 ; logo o limite não está definido. Como tal, podemos acrescentar que uma função f é *diferenciável* em x se e só se tal limite existe.

Já vimos como tratar a diferenciação usando a noção de *limite*. Podemos usar a mesma noção para definir a ideia de função *contínua*. (Bolzano tinha, com efeito, percebido isto já por 1817.) O tratamento Cauchy–Weierstrass da continuidade é o seguinte. Grosso modo: uma função f é contínua (num ponto) desde que, ao exigir um certo grau de precisão relativamente à saída da função, se possa garantir essa precisão insistindo num certo grau de precisão relativamente à entrada da função. Mais precisamente: f é contínua em c desde que, à medida que x tende para zero, a diferença entre $f(c+x)$ e $f(c)$ tenda para 0. De outro modo: f é *contínua* em c se e só se $f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$.

Ir mais longe levar-nos-ia apenas para a análise real, quando o nosso tema é a teoria dos conjuntos. Por isso, agora devemos fazer uma pausa e enunciar a moral. Durante o século XIX, os matemáticos aprenderam a passar sem infinitesimais, invocando uma noção rigorosamente definida de *limite*.

set.3 Patologias

Contudo, a definição de um *limite* acabou por permitir construções bastante “patológicas”.

his:set:pathology:
sec

Por volta da década de 1830, Bolzano descobriu uma função que era *contínua em todo o lado*, mas *não diferenciável em parte nenhuma*. (Infelizmente, Bolzano nunca publicou isto; a ideia foi pela primeira vez encontrada pelos matemáticos em 1872, graças à descoberta independente de Weierstrass da mesma ideia.)¹ Isto era, no mínimo, bastante surpreendente. É fácil encontrar funções, como $|x|$, que são contínuas em todo o lado mas não diferenciáveis num dado ponto. Mas uma função contínua em todo o lado e *não diferenciável em parte nenhuma* é uma criatura muito diferente. Considere, por um momento, como tentaria desenhar tal função. Para garantir que é contínua, deve consegui-la desenhar sem nunca levantar a caneta da página; mas para garantir que não é diferenciável em nenhum ponto, teria de mudar abruptamente a direção da caneta, constantemente.

¹A história está documentada em notas de rodapé extremamente minuciosas do artigo da Wikipédia sobre a função de Weierstrass.

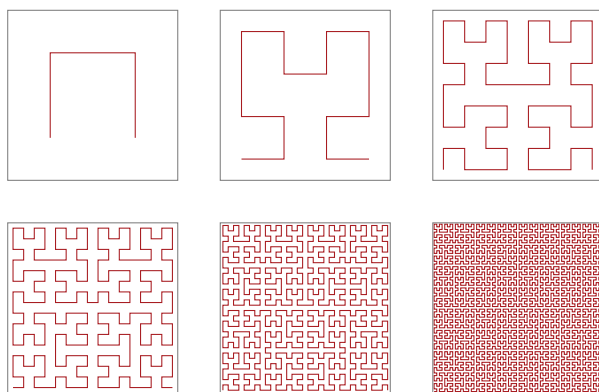
Seguiram-se mais “patologias”. A 5 de janeiro de 1874, Cantor escreveu uma carta a Dedekind, colocando o problema:

Poderá uma superfície (digamos um quadrado incluindo o seu contorno) estar correlacionada biunivocamente com uma linha (digamos uma reta incluindo as extremidades) de modo que a cada ponto da superfície corresponda um ponto da linha e, reciprocamente, a cada ponto da linha corresponda um ponto da superfície?

Ainda me parece, de momento, que a resposta a esta questão é muito difícil—embora aqui também se esteja tão impelido a dizer *não* que se queira considerar quase supérflua a prova. [Citado em [Gouvêa 2011](#)]

Mas, em 1877, Cantor provou que estivera errado. De fato, uma linha e um quadrado têm exatamente o mesmo número de pontos. Escreveu a 29 de junho de 1877 a Dedekind “*je le vois, mais je ne le crois pas*”; isto é, “eu vejo, mas não acredito”. Na “história recebida” da matemática, isto é frequentemente tomado como indicador de quão *literalmente incríveis* eram estes novos resultados para os matemáticos da época. (A correspondência é apresentada em [Gouvêa \(2011\)](#), e voltaremos a ela em [Seção set.4](#). A prova de Cantor está esboçada em [Seção set.5](#).)

Inspirado pelo resultado de Cantor, Peano começou a considerar se seria possível mapear suavemente uma linha sobre um plano. Isto seria uma *curva que preenche o espaço*. Em 1890, Peano construiu precisamente tal curva. Isto é verdadeiramente contraintuitivo: Euclides tinha definido uma linha como “comprimento sem largura” (Livro I, Definição 2), mas Peano mostrara que, enrolando adequadamente uma linha, o seu comprimento pode transformar-se em largura. Em 1891, Hilbert descreveu uma curva preenchedora de espaço ligeiramente mais intuitiva, juntamente com algumas figuras que a ilustram. A curva é construída em sequência, e eis as primeiras seis fases da construção:



No limite—uma noção que, entretanto, recebera definição rigorosa—todo o quadrado fica inteiramente preenchido na cor [vermelho](#). E, de passagem, a curva de Hilbert é contínua em todo o lado mas não diferenciável em parte nenhuma; intuitivamente porque, no limite infinito, a função muda abruptamente de direção a cada instante. (Esboçaremos a construção de Hilbert com mais pormenor na [Seção set.6](#).)

Para o bem ou para o mal, estas construções geométricas “patológicas” foram tratadas como motivo para duvidar de apelos à intuição geométrica. Tornaram-se algo próximo de *propaganda* por uma nova forma de fazer matemática, que culminaria na teoria dos conjuntos. Na construção posterior do mito em torno do assunto, repetia-se, frequentemente, que estes resultados eram ao mesmo tempo perfeitamente rigorosos e perfeitamente chocantes. Serviam portanto um duplo propósito: como aviso contra confiar na intuição geométrica, e como uma demonstração da fertilidade de novas formas de pensar.

set.4 Mais Mito do que História?

Com mais de um século de perspectiva, ao olhar para estes acontecimentos, devemos ter cuidado para não tomar estes veredictos por adquiridos. Os resultados eram certamente novos, entusiasmantes e surpreendentes. Mas quão verdadeiramente chocantes eram? E demonstraram realmente que não devemos confiar na intuição geométrica?

his:set:mythology:
sec

Quanto ao choque, Gouvêa (2011) observa que a célebre nota de Cantor a Dedekind, “*je le vois, mais je ne le crois pas*” é tirada um tanto fora de contexto. Eis mais desse contexto (citado de Gouvêa):

Peço desculpa pelo meu zelo pelo assunto se lhe faço tantas exigências à sua bondade e paciência; as comunicações que ultimamente lhe enviei são mesmo para mim tão inesperadas, tão novas, que não posso ter paz de espírito até obter de si, amigo honrado, uma decisão sobre a sua correcção. Enquanto não concordar comigo, só posso dizer: *je le vois, mais je ne le crois pas*.

Cantor sabia que o seu resultado era “tão inesperado, tão novo”. Mas é duvidoso que alguma vez achasse o seu resultado *inacreditável*. Como Gouvêa observa, estava simplesmente a pedir a Dedekind que verificasse a prova que oferecera.

Quanto à intuição geométrica: Peano publicou a sua curva preenchedora de espaço sem incluir quaisquer diagramas. Mas quando Hilbert publicou a sua curva, explicou o seu propósito: daria aos leitores um modo claro de compreender o resultado de Peano, se “se servirem da seguinte intuição geométrica”; após o que incluiu uma série de *diagramas* tal como os fornecidos em Seção set.3.

De modo mais geral: embora os diagramas tenham caído um tanto em desuso nas provas publicadas, não há como escapar ao fato de que os matemáticos *com frequência* usam diagramas ao provar resultados. (Grosso modo: bons matemáticos sabem quando podem confiar na intuição geométrica.)

Em suma: não acredite na *exaltação*; ou, pelo menos, não a aceite por adquirido. Para mais sobre isto, pode ler Giaquinto (2007).

set.5 Cantor na Reta e no Plano

Algumas circunstâncias em torno da prova de Schröder-Bernstein relacionam-se com a história que discutimos na Seção set.3. Depois de mais de 1877,

his:set:cantorplane:
sec

set:myth rev. 512271 (2020-07-12) por JCCB

Cantor provou que há tantos pontos num quadrado quanto num dos seus lados. Aqui apresentaremos a sua prova (primeira tentativa).

Seja L o intervalo unitário, isto é, o conjunto de pontos $[0, 1]$. Seja S o quadrado unitário, isto é, o conjunto de pontos $L \times L$. Nestes termos, Cantor provou que $L \approx S$. Escreveu uma nota a Dedekind, que continha essencialmente o seguinte argumento.

his:set:cantorplane:
thm:cantorplane

Teorema set.1. $L \approx S$

Prova: primeira parte.. Fixemos $a, b \in L$. Escrevamos a e b em notação binária, de modo que temos sequências infinitas de 0s e 1s, $a_1, a_2, \dots$, e $b_1, b_2, \dots$, tais que:

$$\begin{aligned} a &= 0.a_1a_2a_3a_4\dots \\ b &= 0.b_1b_2b_3b_4\dots \end{aligned}$$

Consideremos a função $f: S \rightarrow L$ dada por

$$f(a, b) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4\dots$$

A função f é **uma injeção**, pois se $f(a, b) = f(c, d)$, então $a_n = c_n$ e $b_n = d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $a = c$ e $b = d$. $\square$

Infelizmente, como Dedekind apontou a Cantor, isto não responde à questão original. Considere-se $0.\dot{1}0 = 0.10101010\dots$. Para que $f(a, b) = 0.\dot{1}0$, seria preciso:

$$\begin{aligned} a &= 0.\dot{1}1 = 0.111111\dots \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Mas $a = 0.\dot{1}1 = 1$. Assim, quando dizemos “escrever a e b em notação binária”, temos de escolher *qual* notação usar; e, como f deve ser uma *função*, só podemos usar *uma* das duas notações possíveis. Mas se, por exemplo, usarmos a notação simples e escrevermos a como “1.000...”, então não existe par $\langle a, b \rangle$ tal que $f(a, b) = 0.\dot{1}0$.

Em resumo: Dedekind observou que, dada a possibilidade de certas expansões binárias periódicas, a função f de Cantor é **uma injeção** mas *não* é **uma sobrejeção**. Cantor tinha mostrado apenas que $S \preceq L$ e *não* que $S \approx L$.

Cantor respondeu a Dedekind quase de imediato, sugerindo essencialmente que a prova poderia completar-se assim:

Prova: completada.. Mostramos que $S \preceq L$. Mas é óbvio que existe **uma injeção** de L para S : basta “deitar” a reta sobre um lado do quadrado. Logo $L \preceq S$ e $S \preceq L$. Pelo teorema de Schröder–Bernstein (??), $L \approx S$. $\square$

Claro que Cantor não podia justificar a última linha nestes termos, pois o teorema de Schröder–Bernstein ainda não estava provado. De fato, embora Cantor viesse a formulá-lo como conjectura geral, só viria a ser provado de modo satisfatório em 1897. (E assim, mais tarde em 1877, Cantor deu outra prova de **Teorema set.1**, que não passava por Schröder–Bernstein.)

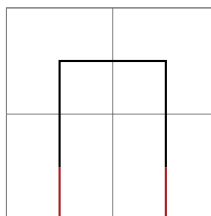
set.6 Apêndice: Curvas Preenchedoras de Espaço de Hilbert

No capítulo [Seção set.3](#), mencionamos que a prova de Cantor de que uma reta e um quadrado têm exatamente o mesmo número de pontos ([Teorema set.1](#)) levou Peano a perguntar se poderia existir uma *curva* que preenchesse o espaço. Obteve resposta afirmativa em 1890. Nesta secção explicamos (de modo informal) como construir a curva preenchedora de espaço de Hilbert (com um pequeno ajuste).²

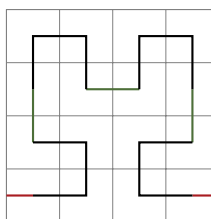
[his:set:hilbertcurve:sec](#)

Temos de definir uma função, h , como limite de uma sequência de funções $h_1, h_2, h_3, \dots$. Primeiro descrevemos a construção. Depois mostramos que preenche o espaço. Depois mostramos que é uma curva.

Tomaremos a imagem de h como sendo o quadrado unitário, S . Eis a nossa primeira aproximação a h , isto é, h_1 :



Para orientação, impusemos uma grelha 2×2 ao quadrado. Podemos pensar na curva como começando no quadrante inferior esquerdo, indo para o superior esquerdo, depois para o superior direito e finalmente para o inferior direito. Eis a segunda etapa da construção, isto é, h_2 :

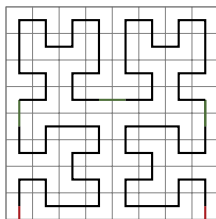


As cores diferentes ajudam a explicar como h_2 foi construída. Colocamos primeiro cópias reduzidas do troço não-vermelho de h_1 no inferior esquerdo, superior esquerdo, superior direito e inferior direito do quadrado (traçadas a preto). Depois ligamos estas quatro figuras (com linhas verde). Por fim, ligamos a figura ao contorno do quadrado (com linhas vermelho).

Passamos a h_3 . Tal como h_2 foi feita a partir de quatro cópias ligadas e reduzidas do troço não vermelho de h_1 , h_3 compõe-se de quatro cópias reduzidas

²Para uma explicação mais rigorosa, ver [Rose \(2010\)](#). O ajuste consiste em incluir as partes vermelhas das curvas abaixo. Isto torna ligeiramente mais fácil verificar que a curva é contínua.

do troço não vermelho de h_2 (a preto), que depois se unem (com linhas verde) e se ligam ao contorno do quadrado (com linhas vermelho).



Agora vê-se o padrão geral para definir h_{n+1} a partir de h_n . Por fim definimos a curva h em si considerando o limite ponto a ponto destas funções sucessivas $h_1, h_2, \dots$. Isto é, para cada $x \in S$:

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$$

Mostramos agora que esta curva preenche o espaço. Ao traçar h_n , impomos uma grelha $2^n \times 2^n$ sobre S . Pelo teorema de Pitágoras, a diagonal de cada célula da grelha tem comprimento:

$$\sqrt{(1/2^n)^2 + (1/2^n)^2} = 2^{(\frac{1}{2}-n)}$$

e é evidente que h_n passa por todas as células. Logo cada ponto de S está a uma distância no máximo $2^{(\frac{1}{2}-n)}$ de algum ponto de h_n . Mas h é definida como o limite das funções $h_1, h_2, h_3, \dots$. Assim, a distância máxima de qualquer ponto a h é dada por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(\frac{1}{2}-n)} = 0.$$

Ou seja: todo o ponto de S está à distância 0 de h . Em outras palavras, todo o ponto de S situa-se *sobre* a curva. Logo h preenche o espaço!

Resta mostrar que h é, de fato, uma *curva*. Para isso é preciso definir o conceito. A definição moderna baseia-se na de Jordan, de 1887 (isto é, poucos anos antes da primeira curva preenchedora de espaço):

Definição set.2. Uma curva é uma aplicação contínua de L para $\mathbb{R}^2$.

Isto é bastante intuitivo: uma curva é, intuitivamente, uma aplicação “suave” que leva uma reta canônica para o plano $\mathbb{R}^2$. A nossa função h é de fato uma aplicação de L para $\mathbb{R}^2$. Logo só precisamos de mostrar que h é contínua. Definimos continuidade em [Seção set.2](#) com a notação ε/δ . Em linguagem corrente, queremos estabelecer o seguinte: *Se especificar um ponto p em S , juntamente com qualquer nível de precisão ε , podemos encontrar um intervalo aberto de L tal que, dado qualquer x nesse intervalo, $h(x)$ fica a uma distância inferior a ε de p .*

Assim: suponhamos que p e ε estão fixos. Isto corresponde, em efeito, a traçar um círculo com centro p e raio ε sobre S . (O círculo pode sair para

fora de S , mas não importa.) Recordemos que, ao descrever h_n , traçamos uma grelha $2^n \times 2^n$ sobre S . É óbvio que, por pequeno que seja ε , existe algum n tal que alguma célula individual da grelha $2^n \times 2^n$ sobre S fica inteiramente dentro do círculo com centro p e raio ε .

Tomemos esse n , e seja I a maior parte aberta de L que h_n mapeia inteiramente para a célula relevante. (É claro que I existe, pois já notamos que h_n passa por todas as células da grelha $2^n \times 2^n$.) Basta agora mostrar que, sempre que $x \in I$, o ponto $h(x)$ pertence à mesma célula. E, para *isso*, basta mostrar que $h_m(x)$ pertence à mesma célula, para qualquer $m > n$. Mas isto é óbvio. Se considerarmos o que acontece com h_m para $m > n$, vemos que exatamente a “mesma parte” do intervalo unitário é mapeada para a mesma célula; apenas a descrevemos de modo cada vez mais esticado e sinuoso.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

- Berkeley, George. 1734. *The Analyst; or, a Discourse Adressed to an Infidel Mathematician*.
- Giaquinto, Marcus. 2007. *Visual Thinking in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- Gouvêa, Fernando Q. 2011. Was Cantor surprised? *American Mathematical Monthly* 118(3): 198–209.
- Hilbert, David. 1891. Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Mathematische Annalen* 38(3): 459–460.
- Peano, Giuseppe. 1890. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen* 36(1): 157–60.
- Rose, Nicholas J. 2010. Hilbert-type space-filling curves. URL <https://web.archive.org/web/20151010184939/http://www4.ncsu.edu/~njrose/pdfFiles/HilbertCurve.pdf>.