

set.1 Patologias

his:set:pathology:
sec

Contudo, a definição de um *limite* acabou por permitir construções bastante “patológicas”.

Por volta da década de 1830, Bolzano descobriu uma função que era *contínua em todo o lado*, mas *não diferenciável em parte nenhuma*. (Infelizmente, Bolzano nunca publicou isto; a ideia foi pela primeira vez encontrada pelos matemáticos em 1872, graças à descoberta independente de Weierstrass da mesma ideia.)¹ Isto era, no mínimo, bastante surpreendente. É fácil encontrar funções, como $|x|$, que são contínuas em todo o lado mas não diferenciáveis num dado ponto. Mas uma função contínua em todo o lado e *não diferenciável em parte nenhuma* é uma criatura muito diferente. Considere, por um momento, como tentaria desenhar tal função. Para garantir que é contínua, deve consegui-la desenhar sem nunca levantar a caneta da página; mas para garantir que não é diferenciável em nenhum ponto, teria de mudar abruptamente a direção da caneta, constantemente.

Seguiram-se mais “patologias”. A 5 de janeiro de 1874, Cantor escreveu uma carta a Dedekind, colocando o problema:

Poderá uma superfície (digamos um quadrado incluindo o seu contorno) estar correlacionada biunivocamente com uma linha (digamos uma reta incluindo as extremidades) de modo que a cada ponto da superfície corresponda um ponto da linha e, reciprocamente, a cada ponto da linha corresponda um ponto da superfície?

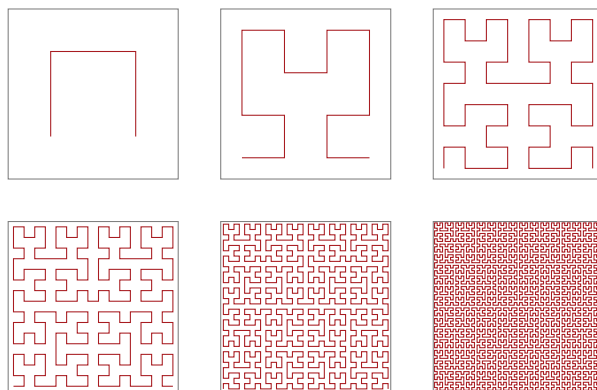
Ainda me parece, de momento, que a resposta a esta questão é muito difícil—embora aqui também se esteja tão impelido a dizer *não* que se queira considerar quase supérflua a prova. [Citado em [Gouvêa 2011](#)]

Mas, em 1877, Cantor provou que estivera errado. De fato, uma linha e um quadrado têm exatamente o mesmo número de pontos. Escreveu a 29 de junho de 1877 a Dedekind “*je le vois, mais je ne le crois pas*”; isto é, “eu vejo, mas não acredito”. Na “história recebida” da matemática, isto é frequentemente tomado como indicador de quão *literalmente incríveis* eram estes novos resultados para os matemáticos da época. (A correspondência é apresentada em [Gouvêa \(2011\)](#), e voltaremos a ela em ???. A prova de Cantor está esboçada em ???.)

Inspirado pelo resultado de Cantor, Peano começou a considerar se seria possível mapear suavemente uma linha sobre um plano. Isto seria uma *curva que preenche o espaço*. Em 1890, Peano construiu precisamente tal curva. Isto é verdadeiramente contraintuitivo: Euclides tinha definido uma linha como “comprimento sem largura” (Livro I, Definição 2), mas Peano mostrara que, enrolando adequadamente uma linha, o seu comprimento pode transformar-se em largura. Em 1891, Hilbert descreveu uma curva preenchedora de espaço

¹A história está documentada em notas de rodapé extremamente minuciosas do artigo da Wikipédia sobre a função de Weierstrass.

ligeiramente mais intuitiva, juntamente com algumas figuras que a ilustram. A curva é construída em sequência, e eis as primeiras seis fases da construção:



No limite—uma noção que, entretanto, recebera definição rigorosa—todo o quadrado fica inteiramente preenchido na cor **vermelho**. E, de passagem, a curva de Hilbert é contínua em todo o lado mas não diferenciável em parte nenhuma; intuitivamente porque, no limite infinito, a função muda abruptamente de direção a cada instante. (Esboçaremos a construção de Hilbert com mais pormenor na ??.)

Para o bem ou para o mal, estas construções geométricas “patológicas” foram tratadas como motivo para duvidar de apelos à intuição geométrica. Tornaram-se algo próximo de *propaganda* por uma nova forma de fazer matemática, que culminaria na teoria dos conjuntos. Na construção posterior do mito em torno do assunto, repetia-se, frequentemente, que estes resultados eram ao mesmo tempo perfeitamente rigorosos e perfeitamente chocantes. Serviam portanto um duplo propósito: como aviso contra confiar na intuição geométrica, e como uma demonstração da fertilidade de novas formas de pensar.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

- Gouvêa, Fernando Q. 2011. Was Cantor surprised? *American Mathematical Monthly* 118(3): 198–209.
- Hilbert, David. 1891. Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Mathematische Annalen* 38(3): 459–460.
- Peano, Giuseppe. 1890. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen* 36(1): 157–60.