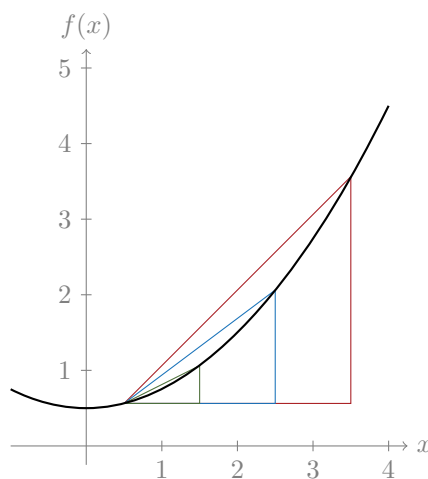


set.1 Infinitesimais e Diferenciação

his:set:infinitesimals:
sec

Newton e Leibniz descobriram o cálculo (independentemente) no fim do século XVII. Uma aplicação particularmente importante do cálculo era a *diferenciação*. Grosso modo, a diferenciação pretende dar uma noção da “taxa de variação”, ou gradiente, de uma função num ponto.

Eis uma forma vívida de ilustrar a ideia. Considere a função $f(x) = x^2/4 + 1/2$, representada a preto abaixo:



Suponhamos que queremos encontrar o gradiente da função em $c = 1/2$. Começamos por desenhar um triângulo cuja hipotenusa aproxima o gradiente nesse ponto, talvez o triângulo vermelho acima. Quando β é o comprimento da base do nosso triângulo, a sua altura é $f(1/2 + \beta) - f(1/2)$, de modo que o gradiente da hipotenusa é:

$$\frac{f(1/2 + \beta) - f(1/2)}{\beta}.$$

Assim, o gradiente do nosso triângulo **vermelho**, com base de comprimento 3, é exatamente 1. A hipotenusa de um triângulo menor, o triângulo **azul** com base de comprimento 2, dá uma melhor aproximação; o seu gradiente é $3/4$. Um triângulo ainda menor, o **verde** com base de comprimento 1, dá uma aproximação ainda melhor, com gradiente $1/2$.

Triângulos cada vez menores dão-nos aproximações cada vez melhores. Por isso poderíamos dizer algo deste gênero: a hipotenusa de um triângulo com comprimento de base *infinitesimal* nos dá o próprio gradiente em $c = 1/2$. Deste modo, obteríamos uma fórmula para a (primeira) derivada da função f no ponto c :

$$f'(c) = \frac{f(c + \beta) - f(c)}{\beta} \text{ onde } \beta \text{ é infinitesimal.}$$

E, grosso modo, foi isto que Newton e Leibniz disseram.

Contudo, uma vez que o disseram, devemos perguntar-lhes: o que é um *infinitesimal*? Surge um dilema sério. Se $\beta = 0$, então f' fica mal definida, pois envolve dividir por 0. Mas se $\beta > 0$, obtemos apenas uma *aproximação* ao gradiente, e não o próprio gradiente.

Esta não é uma preocupação anacrônica. Eis Berkeley, a criticar os seguidores de Newton:

Admito que os signos possam ser feitos para denotar qualquer coisa ou nada: e conseqüentemente que, na notação original $c + \beta$, β poderia ter significado um incremento ou nada. Mas então, seja qual for o significado atribuído a β , é preciso argumentar de modo consistente com essa significação, e não proceder com duplo sentido: o que seria um sofismo manifesto. (Berkeley 1734, §XIII, variáveis alteradas para coincidir com o texto precedente)

Para defender o cálculo infinitesimal face a Berkeley, poder-se-ia responder que a linguagem dos “infinitesimais” é meramente figurada. Poder-se-ia dizer que, desde que tomemos um triângulo *bem pequeno*, obteremos uma aproximação *suficientemente boa* à tangente. Berkeley tinha também uma resposta para isto: embora isso pudesse bastar para a engenharia, minava o *estatuto* da matemática, pois

dizem-nos que *in rebus mathematicis errores quàm minimi non sunt contemnendi*. [No caso da matemática, os menores erros não devem ser desprezados.] (Berkeley, 1734, §IX)

A passagem em itálico é uma citação quase literal do próprio Newton na *Quadrature of Curves* (1704).

As objeções filosóficas de Berkeley são profundamente incisivas. Não obstante, o cálculo foi uma empresa enormemente bem-sucedida, e os matemáticos continuaram a usá-lo sem incorrer em erro.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Berkeley, George. 1734. *The Analyst; or, a Discourse Adressed to an Infidel Mathematician*.