

set.1 Cantor na Reta e no Plano

his:set:cantorplane:
sec

Algumas circunstâncias em torno da prova de Schröder-Bernstein relacionam-se com a história que discutimos em ???. Recordemos que, em 1877, Cantor provou que há tantos pontos num quadrado quanto num dos seus lados. Aqui apresentaremos a sua prova (primeira tentativa).

Seja L o intervalo unitário, isto é, o conjunto de pontos $[0, 1]$. Seja S o quadrado unitário, isto é, o conjunto de pontos $L \times L$. Nestes termos, Cantor provou que $L \approx S$. Escreveu uma nota a Dedekind, que continha essencialmente o seguinte argumento.

his:set:cantorplane:
thm:cantorplane

Teorema set.1. $L \approx S$

Prova: primeira parte.. Fixemos $a, b \in L$. Escrevamos a e b em notação binária, de modo que temos sequências infinitas de 0s e 1s, $a_1, a_2, \dots$, e $b_1, b_2, \dots$, tais que:

$$\begin{aligned}a &= 0.a_1a_2a_3a_4\dots \\b &= 0.b_1b_2b_3b_4\dots\end{aligned}$$

Consideremos a função $f: S \rightarrow L$ dada por

$$f(a, b) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4\dots$$

A função f é **uma injeção**, pois se $f(a, b) = f(c, d)$, então $a_n = c_n$ e $b_n = d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $a = c$ e $b = d$. $\square$

Infelizmente, como Dedekind apontou a Cantor, isto não responde à questão original. Considere-se $0.\dot{1}\dot{0} = 0.10101010\dots$. Para que $f(a, b) = 0.\dot{1}\dot{0}$, seria preciso:

$$\begin{aligned}a &= 0.\dot{1}\dot{1} = 0.111111\dots \\b &= 0\end{aligned}$$

Mas $a = 0.\dot{1}\dot{1} = 1$. Assim, quando dizemos “escrever a e b em notação binária”, temos de escolher *qual* notação usar; e, como f deve ser uma *função*, só podemos usar *uma* das duas notações possíveis. Mas se, por exemplo, usarmos a notação simples e escrevermos a como “1.000...”, então não existe par $\langle a, b \rangle$ tal que $f(a, b) = 0.\dot{1}\dot{0}$.

Em resumo: Dedekind observou que, dada a possibilidade de certas expansões binárias periódicas, a função f de Cantor é **uma injeção** mas *não* é **uma sobrejeção**. Cantor tinha mostrado apenas que $S \preceq L$ e *não* que $S \approx L$.

Cantor respondeu a Dedekind quase de imediato, sugerindo essencialmente que a prova poderia completar-se assim:

Prova: completada.. Mostramos que $S \preceq L$. Mas é óbvio que existe **uma injeção** de L para S : basta “deitar” a reta sobre um lado do quadrado. Logo $L \preceq S$ e $S \preceq L$. Pelo teorema de Schröder–Bernstein (??), $L \approx S$. $\square$

Claro que Cantor não podia justificar a última linha nestes termos, pois o teorema de Schröder-Bernstein ainda não estava provado. De fato, embora Cantor viesse a formulá-lo como conjectura geral, só viria a ser provado de modo satisfatório em 1897. (E assim, mais tarde em 1877, Cantor deu outra prova de **Teorema set.1**, que não passava por Schröder-Bernstein.)

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas