

Parte I

History

Capítulo 1

Biografias

1.1 Georg Cantor

Uma biografia inicial de Georg Cantor (GAY-org KAHN-tor) afirmava que ele tinha nascido e sido encontrado num navio que seguia para São Petersburgo, na Rússia, e que seus pais eram desconhecidos. Isto, porém, não é verdade; embora ele tivesse nascido em São Petersburgo em 1845.

Cantor se doutorou em matemática na Universidade de Berlim em 1867. É conhecido por seu trabalho em teoria dos conjuntos e é considerado o fundador da teoria dos conjuntos como disciplina de pesquisa distinta. Foi o primeiro a provar que existem conjuntos infinitos de tamanhos diferentes. Suas teorias, e sobretudo a teoria dos infinitos, provocaram muito debate entre os matemáticos da época, e seu trabalho foi controverso.

As convicções religiosas de Cantor e seu trabalho matemático estavam inextricavelmente ligados; ele chegou a afirmar que a teoria dos números transfinitos lhe tinha sido comunicada diretamente por Deus. Mais tarde, Cantor sofreu de doença mental. A partir de 1894, e com maior frequência nos últimos anos, Cantor foi internado. As fortes críticas a seu trabalho, incluindo um rompimento com o matemático Leopold Kronecker, levaram à depressão e à perda de interesse pela matemática. Durante episódios depressivos, Cantor se dedicava à filosofia e à literatura, e chegou a publicar uma teoria de que Francis Bacon era o autor das peças de



[his:bio:can:sec](#)

Figura 1.1: Georg Cantor

Shakespeare.

Cantor morreu em 6 de janeiro de 1918, num sanatório em Halle.

Leitura complementar Para biografias completas de Cantor, ver [Dauben \(1990\)](#) e [Grattan-Guinness \(1971\)](#). As visões radicais de Cantor são também descritas no programa da BBC Radio 4 *A Brief History of Mathematics* ([du Sautoy, 2014](#)). Se quiser ouvir as teorias de Cantor em forma de rap, ver [Rose \(2012\)](#).

1.2 Alonzo Church

his:bio:chu:
sec

Alonzo Church nasceu em Washington, DC, em 14 de junho de 1903. Na primeira infância, um acidente com uma arma de ar comprimido deixou Church cego de um olho. Ele concluiu o ensino preparatório em Connecticut em 1920 e iniciou sua formação universitária em Princeton naquele mesmo ano. Concluiu seus estudos de doutorado em 1927. Após alguns anos no exterior, Church retornou a Princeton. Church era conhecido por ser extremamente educado e cuidadoso. Sua escrita no quadro-negro era impecável, e ele preservava artigos importantes cobrindo-os cuidadosamente com cimento Duco (uma cola transparente). Fora de suas atividades acadêmicas, gostava de ler revistas de ficção científica e não tinha receio de escrever aos editores caso identificasse quaisquer imprecisões nos textos.



Figura 1.2: Alonzo Church

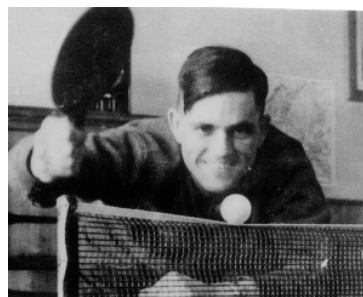
As realizações acadêmicas de Church foram notáveis. Junto com seus alunos Stephen Kleene e Barkley Rosser, ele desenvolveu uma teoria da calculabilidade efetiva, o cálculo lambda, independentemente do desenvolvimento da máquina de Turing por Alan Turing. As duas definições de computabilidade são equivalentes e dão origem ao que hoje é conhecido como a *Tese de Church-Turing*: a de que uma função dos números naturais é efetivamente computável se e somente se for computável por meio de uma máquina de Turing (ou do cálculo lambda). Ele também provou o que hoje é conhecido como o *Teorema de Church*: o problema da decisão para a validade de fórmulas de primeira ordem é insolúvel.

Church continuou seu trabalho até a velhice. Em 1967, deixou Princeton para ir à UCLA, onde foi professor até se aposentar, em 1990. Church faleceu em 1º de agosto de 1995, aos 92 anos.

Leitura complementar Para uma breve biografia de Church, veja [Enderton \(2019\)](#). Os escritos originais de Church sobre o cálculo lambda e o Entscheidungsproblem (Tese de Church) são [Church \(1936a,b\)](#). [Aspray \(1984\)](#) registra uma entrevista com Church sobre a comunidade matemática de Princeton na década de 1930. Church escreveu uma série de resenhas de livros para o *Journal of Symbolic Logic* de 1936 até 1979. Todas estão arquivadas no site de John MacFarlane ([MacFarlane, 2015](#)).

1.3 Gerhard Gentzen

Gerhard Gentzen é conhecido principalmente como o criador da teoria estrutural da prova e, especificamente, pela criação dos sistemas de [derivação](#) de dedução natural e de cálculo de seqüentes. Ele nasceu em 24 de novembro de 1909 em Greifswald, na Alemanha. Gerhard foi educado em casa por três anos antes de frequentar o ensino preparatório, onde estava atrás da maioria de seus colegas em termos de instrução. Apesar disso, era um aluno brilhante e demonstrava forte aptidão para a matemática. Seus interesses eram variados e ele, por exemplo, também escrevia poemas para a mãe e peças para o teatro da escola.



his:bio:gen:
sec

Figura 1.3: Gerhard Gentzen

Gentzen começou seus estudos universitários na Universidade de Greifswald, mas passou por Göttingen, Munique e Berlim. Recebeu seu doutorado em 1933 pela Universidade de Göttingen, sob a orientação de Hermann Weyl. (Paul Bernays supervisionou a maior parte de seu trabalho, mas foi demitido da universidade pelos nazistas.) Em 1934, Gentzen começou a trabalhar como assistente de David Hilbert. Nesse mesmo ano, desenvolveu os sistemas de [derivação](#) de cálculo de seqüentes e de dedução natural, em seus artigos *Untersuchungen über das logische Schließen I–II* [*Investigações sobre a Dedução Lógica I–II*]. Ele provou a consistência dos axiomas de Peano em 1936.

A relação de Gentzen com os nazistas é complicada. Ao mesmo tempo em que seu mentor Bernays foi forçado a deixar a Alemanha, Gentzen ingressou no braço universitário da SA, a organização paramilitar nazista. Como muitos alemães, foi membro do partido nazista. Durante a guerra, serviu como oficial de telecomunicações na unidade de inteligência aérea. No entanto, em 1942 foi dispensado do serviço devido a um colapso nervoso. Não está claro se as lealdades de Gentzen estavam com o partido nazista ou se ele ingressou no partido a fim de garantir sucesso acadêmico.

Em 1943, foi oferecida a Gentzen uma posição acadêmica no Instituto Matemático da Universidade Alemã de Praga, que ele aceitou. No entanto, em 1945 os cidadãos de Praga se revoltaram contra a ocupação alemã. As forças

soviéticas chegaram à cidade e prenderam todos os professores da universidade. Por causa de sua filiação a organizações nazistas, Gentzen foi levado a um campo de trabalhos forçados. Ele morreu de desnutrição em sua cela em 4 de agosto de 1945, aos 35 anos.

Leitura complementar Para uma biografia completa de Gentzen, veja [Menzler-Trott \(2007\)](#). Uma leitura interessante sobre matemáticos sob o regime nazista, que traz uma breve nota sobre a vida de Gentzen, é dada por [Segal \(2014\)](#). Os artigos de Gentzen sobre dedução lógica estão disponíveis no alemão original ([Gentzen, 1935a,b](#)). Traduções para o inglês dos artigos de Gentzen foram reunidas em um único volume por [Szabo \(1969\)](#), que também inclui um esboço biográfico.

1.4 Kurt Gödel

his:bio:god:
sec

Kurt Gödel (GER-dle) nasceu em 28 de abril de 1906 em Brünn, no império austro-húngaro (hoje Brno, na República Tcheca). Devido a seu espírito inquisitivo e brilhante, o jovem Kurtele era muitas vezes chamado “Der kleine Herr Warum” (o Pequeno Senhor Porquê) pela família. Destacou-se nos estudos desde a escola primária, tendo obtido menos do que a nota mais alta apenas em matemática. Gödel faltava frequentemente à escola por causa da frágil saúde e estava isento de educação física. Foi diagnosticado com febre reumática durante a infância. Ao longo da vida, acreditou que isso tinha afetado permanentemente seu coração, apesar dos pareceres médicos em contrário.



Figura 1.4: Kurt Gödel

Gödel começou a estudar na Universidade de Viena em 1924 e concluiu o doutorado em 1929. Inicialmente pretendia estudar física, mas seus interesses se deslocaram rapidamente para a matemática e sobretudo para a lógica, em parte devido à influência do filósofo Rudolf Carnap. Sua dissertação, orientada por Hans Hahn, provava o teorema de completude da lógica de predicados de primeira ordem com identidade ([Gödel, 1929](#)). Apenas um ano depois, obteve seus resultados mais famosos—o primeiro e o segundo teorema da incompletude (publicados em [Gödel 1931](#)). Durante o período em Viena, Gödel participou intensamente no Círculo de Viena, um grupo de filósofos de orientação científica que incluía Carnap, cujo trabalho foi especialmente influenciado pelos resultados de Gödel.

Em 1938, Gödel se casou com Adele Nimbursky. Os pais não ficaram contentes: não só ela era seis anos mais velha e já divorciada, como trabalhava como bailarina num clube noturno. As pressões sociais não afetaram Gödel, contudo, e permaneceram felizmente casados até sua morte.

Depois de a Alemanha Nazi ter anexado a Áustria em 1938, Gödel e Adele emigraram para os Estados Unidos, onde ele assumiu um lugar no Institute for Advanced Study em Princeton, Nova Jersey. Apesar da introversão e do caráter excêntrico, o período de Gödel em Princeton foi colaborativo e frutífero. Publicou ensaios em teoria dos conjuntos, filosofia e física. Notavelmente, estabeleceu uma amizade particularmente forte com o colega no IAS, Albert Einstein.

Nos últimos anos, a saúde mental de Gödel se deteriorou. A internação da esposa em 1977 fez com que ela não pudesse mais cozinhar as refeições dele. Tendo sofrido de problemas de saúde mental ao longo da vida, sucumbiu à paranoia. Com medo mortal de ser envenenado, Gödel se recusou a comer. Morreu de inanição em 14 de janeiro de 1978, em Princeton.

Leitura complementar Para uma biografia completa da vida de Gödel, ver [John Dawson \(1997\)](#). Para outros textos biográficos, bem como ensaios sobre as contribuições de Gödel para a lógica e a filosofia, ver [Wang \(1990\)](#), [Baaz et al. \(2011\)](#), [Takeuti et al. \(2003\)](#), e [Sigmund et al. \(2007\)](#).

A tese de doutorado de Gödel está disponível no alemão original ([Gödel, 1929](#)). O texto original dos teoremas da incompletude é ([Gödel, 1931](#)). Todas as publicações e textos não publicados de Gödel, bem como uma seleção de correspondência, estão disponíveis em inglês em seus *Collected Papers* [Feferman et al. \(1986, 1990\)](#).

Para um tratamento detalhado dos teoremas da incompletude de Gödel, ver [Smith \(2013\)](#). Para uma discussão informal e filosófica dos teoremas de Gödel, ver o podcast de Mark Linsenmayer ([Linsenmayer, 2014](#)).

1.5 Emmy Noether

Emmy Noether (NER-ter) nasceu em Erlangen, na Alemanha, em 23 de março de 1882, em uma família erudita de classe média alta. Aclamada como a “mãe da álgebra moderna”, Noether fez contribuições inovadoras tanto para a matemática quanto para a física, apesar das significativas barreiras à educação das mulheres. Na Alemanha daquela época, esperava-se que as meninas fossem educadas nas artes e elas não tinham permissão para frequentar escolas preparatórias para a faculdade. No entanto, após assistir como ouvinte às aulas nas Universidades de Göttingen e Erlangen (onde seu pai era professor de matemática), Noether finalmente conseguiu se matricular como aluna em Erlangen em 1904, quando a política da instituição foi atualizada para permitir estudantes do sexo feminino. Ela recebeu seu doutorado em matemática em 1907.

[his:bio:noe:sec](#)

Apesar de suas qualificações, Noether enfrentou muita resistência durante sua carreira. De 1908 a 1915, ela lecionou em Erlangen sem remuneração. Durante esse período, chamou a atenção de David Hilbert, um dos mais eminentes matemáticos do mundo na época, que a convidou para Göttingen. No entanto, as mulheres eram proibidas de obter cátedras, e ela só pôde lecionar sob o nome de Hilbert, novamente sem remuneração. Foi nesse período que ela provou o que hoje é conhecido como o teorema de Noether, que ainda é usado na física teórica atualmente. Noether finalmente recebeu o direito de lecionar em 1919. A resposta de Hilbert à resistência contínua de seus colegas de universidade teria sido: “Senhores, o conselho da faculdade não é uma casa de banhos.”



Figura 1.5: Emmy Noether

No final da década de 1920, ela concentrou-se no trabalho em álgebra abstrata, e suas contribuições revolucionaram o campo. Em suas provas, ela frequentemente fazia uso da chamada condição de cadeia ascendente, que afirma que não há cadeia infinita estritamente crescente de certos conjuntos. Por exemplo, certas estruturas algébricas hoje conhecidas como anéis noetherianos têm a propriedade de que não há sequências infinitas de ideais $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$. A condição pode ser generalizada para qualquer ordem parcial (na álgebra, ela diz respeito ao caso especial de ideais ordenados pela relação de subconjunto), e também podemos considerar a condição dual de cadeia descendente, na qual toda sequência estritamente *decrecente* em uma ordem parcial eventualmente termina. Se uma ordem parcial satisfaz a condição de cadeia descendente, é possível usar indução ao longo dessa ordem de maneira semelhante àquela em que podemos usar indução ao longo da ordem $<$ sobre $\mathbb{N}$. Tais ordens são chamadas *bem fundadas* ou *noetherianas*, e o princípio de prova correspondente, *indução noetheriana*.

Noether era judia e, quando os nazistas chegaram ao poder em 1933, ela foi demitida de seu cargo. Felizmente, Noether conseguiu emigrar para os Estados Unidos para ocupar uma posição temporária em Bryn Mawr, na Pensilvânia. Durante seu tempo lá, ela também lecionou em Princeton, embora considerasse a universidade pouco acolhedora para as mulheres (Dick, 1981, 81). Em 1935, Noether passou por uma operação para remover um tumor uterino. Ela morreu de uma infecção decorrente da cirurgia e foi enterrada em Bryn Mawr.

Leitura complementar Para uma biografia de Noether, veja Dick (1981). O Perimeter Institute for Theoretical Physics disponibiliza on-line suas palestras

sobre a vida e a influência de Noether ([Institute, 2015](#)). Se você estiver cansado de ler, *Stuff You Missed in History Class* tem um podcast sobre a vida e a influência de Noether ([Frey and Wilson, 2015](#)). As obras reunidas de Noether estão disponíveis no alemão original ([Jacobson, 1983](#)).

-NoValue-

1.6 Rózsa Péter

Rózsa Péter was born Rózsa Politzer, in Budapest, Hungary, on February 17, 1905. She is best known for her work on recursive functions, which was essential for the creation of the field of recursion theory.

Péter was raised during harsh political times—WWI raged when she was a teenager—but was able to attend the affluent Maria Terezia Girls' School in Budapest, from where she graduated in 1922. She then studied at Pázmány Péter University (later renamed Loránd Eötvös University) in Budapest. She began studying chemistry at the insistence of her father, but later switched to mathematics, and graduated in 1927. Although she had the credentials to teach high school mathematics, the economic situation at the time was dire as the Great Depression affected the world economy. During this time, Péter took odd jobs as a tutor and private teacher of mathematics. She eventually returned to university to take up graduate studies in mathematics. She had originally planned to work in number theory, but after finding out that her results had already been proven, she almost gave up on mathematics altogether. She was encouraged to work on Gödel's incompleteness theorems, and unknowingly proved several of his results in different ways. This restored her confidence, and Péter went on to write her first papers on recursion theory, inspired by David Hilbert's foundational program. She received her PhD in 1935, and in 1937 she became an editor for the *Journal of Symbolic Logic*.

Péter's early papers are widely credited as founding contributions to the field of recursive function theory. In [Péter \(1935a\)](#), she investigated the relationship between different kinds of recursion. In [Péter \(1935b\)](#), she showed that a certain recursively defined function is not primitive recursive. This simplified an earlier result due to Wilhelm Ackermann. Péter's simplified function is what's now often called the Ackermann function—and sometimes, more properly, the Ackermann–Péter function. She wrote the first book on recursive



[his:bio:pet:](#)
[sec](#)

Figura 1.6: Rózsa Péter

function theory (Péter, 1951).

Despite the importance and influence of her work, Péter did not obtain a full-time teaching position until 1945. During the Nazi occupation of Hungary during World War II, Péter was not allowed to teach due to anti-Semitic laws. In 1944 the government created a Jewish ghetto in Budapest; the ghetto was cut off from the rest of the city and attended by armed guards. Péter was forced to live in the ghetto until 1945 when it was liberated. She then went on to teach at the Budapest Teachers Training College, and from 1955 onward at Eötvös Loránd University. She was the first female Hungarian mathematician to become an Academic Doctor of Mathematics, and the first woman to be elected to the Hungarian Academy of Sciences.

Péter was known as a passionate teacher of mathematics, who preferred to explore the nature and beauty of mathematical problems with her students rather than to merely lecture. As a result, she was affectionately called “Aunt Rosa” by her students. Péter died in 1977 at the age of 71.

Leitura complementar For more biographical reading, see (O'Connor and Robertson, 2014) and (Andrásfai, 1986). Tamassy (1994) conducted a brief interview with Péter. For a fun read about mathematics, see Péter’s book *Playing With Infinity* (Péter, 2010).

-NoValue-

1.7 Julia Robinson

his:bio:rob:
sec

Julia Bowman Robinson was an American mathematician. She is known mainly for her work on decision problems, and most famously for her contributions to the solution of Hilbert’s tenth problem. Robinson was born in St. Louis, Missouri, on December 8, 1919. Robinson recalls being intrigued by numbers already as a child (Reid, 1986, 4). At age nine she contracted scarlet fever and suffered from several recurrent bouts of rheumatic fever. This forced her to spend much of her time in bed, putting her behind in her education. Although she was able to catch up with the help of private tutors, the physical effects of her illness had a lasting impact on her life.

Despite her childhood struggles, Robinson graduated high school with several awards in mathematics and the sciences. She started her university career at San Diego State College, and trans-

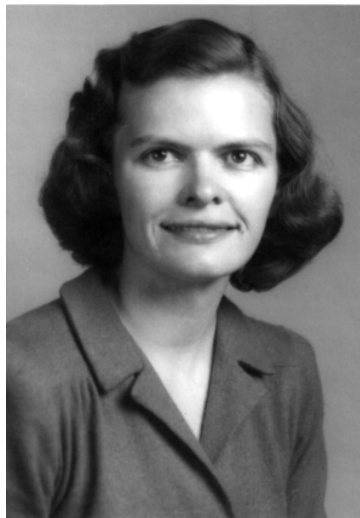


Figura 1.7: Julia Robinson

ferred to the University of California, Berkeley, as a senior. There she was influenced by the mathematician Raphael Robinson. They became good friends, and married in 1941. As a spouse of a faculty member, Robinson was barred from teaching in the mathematics department at Berkeley. Although she continued to audit mathematics classes, she hoped to leave university and start a family. Not long after her wedding, however, Robinson contracted pneumonia. She was told that there was substantial scar tissue build up on her heart due to the rheumatic fever she suffered as a child. Due to the severity of the scar tissue, the doctor predicted that she would not live past forty and she was advised not to have children (Reid, 1986, 13).

Robinson was depressed for a long time, but eventually decided to continue studying mathematics. She returned to Berkeley and completed her PhD in 1948 under the supervision of Alfred Tarski. The first-order theory of the real numbers had been shown to be decidable by Tarski, and from Gödel's work it followed that the first-order theory of the natural numbers is undecidable. It was a major open problem whether the first-order theory of the rationals is decidable or not. In her thesis (1949), Robinson proved that it was not.

Interested in decision problems, Robinson next attempted to find a solution to Hilbert's tenth problem. This problem was one of a famous list of 23 mathematical problems posed by David Hilbert in 1900. The tenth problem asks whether there is an algorithm that will answer, in a finite amount of time, whether or not a polynomial equation with integer coefficients, such as $3x^2 - 2y + 3 = 0$, has a solution in the integers. Such questions are known as *Diophantine problems*. After some initial successes, Robinson joined forces with Martin Davis and Hilary Putnam, who were also working on the problem. They succeeded in showing that exponential Diophantine problems (where the unknowns may also appear as exponents) are undecidable, and showed that a certain conjecture (later called "J.R.") implies that Hilbert's tenth problem is undecidable (Davis et al., 1961). Robinson continued to work on the problem throughout the 1960s. In 1970, the young Russian mathematician Yuri Matijasevich finally proved the J.R. hypothesis. The combined result is now called the Matijasevich–Robinson–Davis–Putnam theorem, or MRDP theorem for short. Matijasevich and Robinson became friends and collaborated on several papers. In a letter to Matijasevich, Robinson once wrote that "actually I am very pleased that working together (thousands of miles apart) we are obviously making more progress than either one of us could alone" (Matijasevich, 1992, 45).

Robinson was the first female president of the American Mathematical Society, and the first woman to be elected to the National Academy of Science. She died on July 30, 1985 at the age of 65 after being diagnosed with leukemia.

Leitura complementar Robinson's mathematical papers are available in her *Collected Works* (Robinson, 1996), which also includes a reprint of her National Academy of Sciences biographical memoir (Feferman, 1994). Robinson's older sister Constance Reid published an "Autobiography of Julia," based on interviews (Reid, 1986), as well as a full memoir (Reid, 1996). A short docu-

mentary about Robinson and Hilbert's tenth problem was directed by George Csicsery (Csicsery, 2016). For a brief memoir about Yuri Matijasevich's collaborations with Robinson, and her influence on his work, see (Matijasevich, 1992).

1.8 Bertrand Russell

his:bio:rus:
sec

Bertrand Russell é celebrado como um dos fundadores da filosofia analítica moderna. Nascido em 18 de maio de 1872, Russell não era conhecido apenas pelo trabalho em filosofia e lógica, mas escreveu muitos livros de divulgação em diversas áreas. Foi também um ardente ativista político ao longo da vida.

Russell nasceu em Trellech, Monmouthshire, no País de Gales. Os pais pertenciam à nobreza britânica. Eram livre-pensadores e chegaram a travar amizade com os radicais de Boston da época. Infelizmente, os pais de Russell morreram quando ele era ainda criança, e Russell foi viver com os avós. Ali recebeu uma educação religiosa (algo que os pais tinham querido evitar a todo custo). A avó era muito rigorosa em todas as questões de moralidade. Na adolescência foi sobretudo educado em casa por professores particulares.

A influência de Russell na filosofia analítica, e sobretudo na lógica, é enorme. Estudou matemática e filosofia no Trinity College, em Cambridge, onde foi influenciado pelo matemático e filósofo Alfred North Whitehead. Em 1910, Russell e Whitehead publicaram o primeiro volume de *Principia Mathematica*, defendendo a ideia de que a matemática é redutível à lógica. Seguiu-se a publicação de centenas de livros, ensaios e panfletos políticos. Em 1950, ganhou o Prêmio Nobel de Literatura.

Russell se encontrava profundamente envolvido na política e no ativismo social. Durante a Primeira Guerra Mundial foi preso e condenado a seis meses de prisão por atividades pacifistas e protesto. Na prisão pôde escrever e ler, e afirma ter achado a experiência “bastante agradável.” Permaneceu pacifista ao longo da vida, e voltou a ser detido por participar num comício pelo desarmamento nuclear em 1961. Sobreviveu também a um acidente de avião em 1948, no qual os únicos sobreviventes eram os que estavam sentados na área de fumantes. Por isso, Russell declarou que devia a vida ao tabagismo. Russell se casou quatro vezes, mas tinha fama de manter relações extraconjugais.

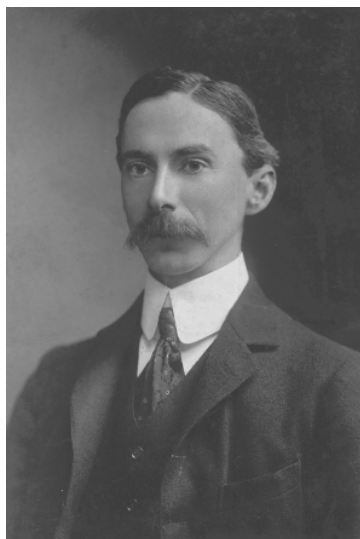


Figura 1.8: Bertrand Russell

Morreu em 2 de fevereiro de 1970, aos 97 anos, em Penrhyndeudraeth, no País de Gales.

Leitura complementar Russell escreveu uma autobiografia em três partes, que abrange sua vida de 1872 a 1967 (Russell, 1967, 1968, 1969). O Bertrand Russell Research Centre na McMaster University alberga os arquivos de Bertrand Russell. Ver o site em Duncan (2015), para informação sobre os volumes de suas obras reunidas (incluindo índices pesquisáveis) e projetos de arquivo. O artigo de Russell *On Denoting* (Russell, 1905) é um clássico da filosofia analítica do século XX.

A entrada da Stanford Encyclopedia of Philosophy sobre Russell (Irvine, 2015) inclui excertos de áudio de Russell a falar sobre Desejo e teoria política. Estão disponíveis online muitas entrevistas em vídeo com Russell. Para o ouvir falar de tabagismo e do envolvimento num acidente de avião, ver, por exemplo, Russell (n.d.). Algumas obras de Russell, incluindo a *Introduction to Mathematical Philosophy*, estão disponíveis como audiolivros gratuitos em LibriVox (n.d.).

1.9 Alfred Tarski

Alfred Tarski nasceu em 14 de janeiro de 1901 em Varsóvia, na Polónia (então parte do Império Russo). Descrito como “napoleônico”, Tarski era ruidoso, falador e intenso. Sua energia se refletia muitas vezes nas aulas—chegou a incendiar um cesto de lixo ao jogar fora um cigarro durante uma aula, e foi proibido de lecionar novamente naquele edifício.

Tarski tinha sede de conhecimento desde cedo. Mais tarde diria aos estudantes que estudara lógica porque era a única disciplina em que tivera um B, mas os registros do colégio mostram que tinha notas máximas em tudo—até em lógica. Estudou na Universidade de Varsóvia de 1918 a 1924. Tarski pretendia inicialmente estudar biologia, mas se interessou por matemática, filosofia e lógica, pois a universidade era o centro da Escola de Lógica e Filosofia de Varsóvia. Tarski se doutorou em 1924 sob orientação de Stanisław Leśniewski.

Antes de emigrar para os Estados Unidos em 1939, Tarski completou parte de seu trabalho mais importante enquanto professor de ensino secundário em Varsóvia. O trabalho sobre consequência lógica e verdade lógica foi escrito



his:bio:tar:
sec

Figura 1.9: Alfred Tarski

nesse período. Em 1939, Tarski se encontrava nos Estados Unidos numa turnê de palestras. Durante a visita, a Alemanha invadiu a Polônia, e, por causa da ascendência judaica, Tarski não pôde retornar. A esposa e os filhos permaneceram na Polônia até o fim da guerra, mas depois também puderam emigrar para os Estados Unidos. Tarski lecionou em Harvard, no College of the City of New York, no Institute for Advanced Study em Princeton, e finalmente na Universidade da Califórnia, em Berkeley. Ali fundou o programa multidisciplinar em Lógica e Metodologia da Ciência. Tarski morreu em 26 de outubro de 1983, aos 82 anos.

Leitura complementar Para mais sobre a vida de Tarski, ver a biografia *Alfred Tarski: Life and Logic* (Feferman and Feferman, 2004). As obras fundadoras de Tarski sobre consequência lógica e verdade estão disponíveis em inglês em (Corcoran, 1983). Todas as obras originais de Tarski foram reunidas numa série de quatro volumes, (Tarski, 1981).

1.10 Alan Turing

his:bio:tur:
sec

Alan Turing nasceu em Maida Vale, Londres, em 23 de junho de 1912. É considerado o pai da ciência da computação teórica. O interesse de Turing pelas ciências físicas e pela matemática começou em tenra idade. No entanto, quando menino, seus interesses não eram bem contemplados nas escolas que frequentava, onde a ênfase recaía sobre a literatura e os clássicos. Consequentemente, ele teve um desempenho fraco na escola e foi repreendido por muitos de seus professores.

Turing estudou no King's College, em Cambridge, na graduação, onde estudou matemática. Em 1936, Turing desenvolveu (o que hoje se chama) a máquina de Turing como uma tentativa de definir precisamente a noção de função computável e de provar a indecidibilidade do problema da decisão. Ele foi superado no resultado por Alonzo Church, que o provou por meio de seu próprio cálculo lambda. Ainda assim, o artigo de Turing foi publicado com referência ao resultado de Church. Church convidou Turing para Princeton, onde ele passou de 1936 a 1938 e obteve um doutorado sob a orientação de Church.



Figura 1.10: Alan Turing

Apesar de seu interesse pela lógica, os interesses anteriores de Turing pelas ciências físicas permaneceram predominantes. Suas habilidades práticas foram postas em prática durante seu serviço

no departamento britânico de criptanálise em Bletchley Park durante a Segunda Guerra Mundial. Turing foi uma figura central na quebra da cifra usada nas comunicações navais alemãs—o código Enigma. A expertise de Turing em estatística e criptografia, juntamente com a introdução de maquinário eletrônico, deu à equipe a capacidade de quebrar o código por meio da criação de uma máquina de descriptografia chamada “bombe”. Suas ideias também ajudaram na criação do primeiro computador eletrônico programável do mundo, o Colossus, também usado em Bletchley Park para quebrar a cifra alemã Lorenz.

Turing era homossexual. Mesmo assim, em 1942 ele pediu Joan Clarke em casamento, uma de suas colegas de equipe em Bletchley Park, mas depois rompeu o noivado e confessou a ela que era homossexual. Teve vários amantes ao longo da vida, embora os atos homossexuais fossem, então, crimes no Reino Unido. Em 1952, a casa de Turing foi assaltada por um amigo de seu amante da época e, ao prestar queixa à polícia, Turing admitiu ter um relacionamento homossexual, sob a impressão de que o governo estava a caminho de legalizar os atos homossexuais. Isso não era verdade, e ele foi acusado de grave indecência. Em vez de ir para a prisão, Turing optou por um tratamento hormonal que reduzia a libido. Turing foi encontrado morto em 8 de junho de 1954, de uma overdose de cianeto—muito provavelmente suicídio. Ele recebeu um perdão real da Rainha Elizabeth II em 2013.

Leitura complementar Para uma biografia abrangente de Alan Turing, veja [Hodges \(2014\)](#). A vida e a obra de Turing inspiraram uma peça, *Breaking the Code*, que foi produzida em 1996 para a TV, com Derek Jacobi no papel de Turing. *The Imitation Game*, um filme indicado ao Oscar, com Benedict Cumberbatch e Kiera Knightley, também é baseado livremente na vida de Alan Turing e em seu período em Bletchley Park ([Tyldum, 2014](#)).

[Radiolab \(2012\)](#) tem vários podcasts sobre a vida e a obra de Turing. O documentário *The Strange Life and Death of Dr. Turing*, da BBC Horizon, está disponível para assistir on-line ([Sykes, 1992](#)). ([Theelen, 2012](#)) é um vídeo curto de uma Máquina de Turing de LEGO em funcionamento—feito para homenagear o centenário de Turing em 2012.

O artigo original de Turing sobre máquinas de Turing e o problema da decisão é [Turing \(1937\)](#).

1.11 Ernst Zermelo

Ernst Zermelo nasceu em 27 de julho de 1871 em Berlim, na Alemanha. Tinha cinco irmãs, embora a família sofresse de frágil saúde e apenas três sobrevivessem à idade adulta. Os pais também faleceram quando ele era jovem, deixando-o órfão, com os irmãos, aos dezessete anos. Zermelo tinha um profundo interesse pelas artes, e sobretudo pela poesia. Era conhecido por ser perspicaz, espirituoso e crítico. Entre suas conquistas matemáticas mais celebradas estão a introdução do axioma da escolha (em 1904) e sua axiomatização da teoria dos conjuntos (em 1908).

[his:bio:zermelo](#)

Os interesses de Zermelo na universidade eram variados. Frequentou cursos de física, matemática e filosofia. Sob orientação de Hermann Schwarz, Zermelo concluiu a dissertação *Investigations in the Calculus of Variations* em 1894 na Universidade de Berlim. Em 1897, decidiu prosseguir estudos na Universidade de Göttingen, onde foi fortemente influenciado pelo trabalho fundacional de David Hilbert. Em 1899 tornou-se elegível para uma cátedra, mas só obteve uma onze anos depois—possivelmente devido a seu comportamento estranho e à “pressa nervosa.”

Zermelo obteve finalmente uma cátedra remunerada na Universidade de Zurique em 1910, mas foi forçado a se aposentar em 1916 por causa da tuberculose. Depois da recuperação, foi nomeado professor honorário na Universidade de Freiburg em 1921. Nesse período dedicou-se à matemática fundacional. Irritou-se com os trabalhos de Thoralf Skolem e Kurt Gödel, e criticou publicamente suas abordagens em seus artigos. Foi demitido do cargo em Freiburg em 1935, devido a sua impopularidade e à oposição à ascensão de Hitler ao poder na Alemanha.

Os últimos anos da vida de Zermelo foram marcados pelo isolamento. Depois da demissão em 1935, abandonou a matemática. Mudou-se para o campo, onde viveu modestamente. Casou-se em 1944 e ficou completamente dependente da esposa à medida que ia ficando cego. Zermelo perdeu totalmente a visão por volta de 1951. Faleceu em Günterstal, na Alemanha, em 21 de maio de 1953.



Figura 1.11: Ernst Zermelo

Leitura complementar Para uma biografia completa de Zermelo, ver [Ebbinghaus \(2015\)](#). Os artigos fundadores de 1904 e 1908 de Zermelo podem ser lidos no alemão original ([Zermelo, 1904, 1908](#)). As obras reunidas de Zermelo, incluindo os escritos sobre física, estão disponíveis em tradução inglesa em [Ebbinghaus et al. \(2010\)](#); [Ebbinghaus and Kanamori \(2013\)](#).

Capítulo 2

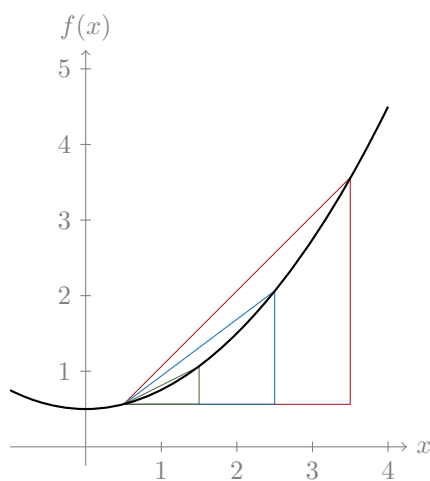
História e Mitologia da Teoria dos Conjuntos

This chapter includes the historical prelude from Tim Button’s Open Set Theory text.

2.1 Infinitesimais e Diferenciação

Newton e Leibniz descobriram o cálculo (independentemente) no fim do século XVII. Uma aplicação particularmente importante do cálculo era a *diferenciação*. Grosso modo, a diferenciação pretende dar uma noção da “taxa de variação”, ou gradiente, de uma função num ponto. his:set:infinitesimals:sec

Eis uma forma vívida de ilustrar a ideia. Considere a função $f(x) = x^2/4 + 1/2$, representada a preto abaixo:



Suponhamos que queremos encontrar o gradiente da função em $c = 1/2$. Começamos por desenhar um triângulo cuja hipotenusa aproxima o gradiente nesse ponto, talvez o triângulo vermelho acima. Quando β é o comprimento da base do nosso triângulo, a sua altura é $f(1/2 + \beta) - f(1/2)$, de modo que o gradiente da hipotenusa é:

$$\frac{f(1/2 + \beta) - f(1/2)}{\beta}.$$

Assim, o gradiente do nosso triângulo **vermelho**, com base de comprimento 3, é exatamente 1. A hipotenusa de um triângulo menor, o triângulo **azul** com base de comprimento 2, dá uma melhor aproximação; o seu gradiente é $3/4$. Um triângulo ainda menor, o **verde** com base de comprimento 1, dá uma aproximação ainda melhor, com gradiente $1/2$.

Triângulos cada vez menores dão-nos aproximações cada vez melhores. Por isso poderíamos dizer algo deste gênero: a hipotenusa de um triângulo com comprimento de base *infinitesimal* nos dá o próprio gradiente em $c = 1/2$. Deste modo, obteríamos uma fórmula para a (primeira) derivada da função f no ponto c :

$$f'(c) = \frac{f(c + \beta) - f(c)}{\beta} \text{ onde } \beta \text{ é infinitesimal.}$$

E, grosso modo, foi isto que Newton e Leibniz disseram.

Contudo, uma vez que o disseram, devemos perguntar-lhes: o que é um *infinitesimal*? Surge um dilema sério. Se $\beta = 0$, então f' fica mal definida, pois envolve dividir por 0. Mas se $\beta > 0$, obtemos apenas uma *aproximação* ao gradiente, e não o próprio gradiente.

Esta não é uma preocupação anacrônica. Eis Berkeley, a criticar os seguidores de Newton:

Admito que os signos possam ser feitos para denotar qualquer coisa ou nada: e conseqüentemente que, na notação original $c + \beta$, β poderia ter significado um incremento ou nada. Mas então, seja qual for o significado atribuído a β , é preciso argumentar de modo consistente com essa significação, e não proceder com duplo sentido: o que seria um sofismo manifesto. (Berkeley 1734, §XIII, variáveis alteradas para coincidir com o texto precedente)

Para defender o cálculo infinitesimal face a Berkeley, poder-se-ia responder que a linguagem dos “infinitesimais” é meramente figurada. Poder-se-ia dizer que, desde que tomemos um triângulo *bem pequeno*, obteremos uma aproximação *suficientemente boa* à tangente. Berkeley tinha também uma resposta para isto: embora isso pudesse bastar para a engenharia, minava o *estatuto* da matemática, pois

dizem-nos que *in rebus mathematicis errores quàm minimi non sunt contemnendi*. [No caso da matemática, os menores erros não devem ser desprezados.] (Berkeley, 1734, §IX)

A passagem em itálico é uma citação quase literal do próprio Newton na *Quadrature of Curves* (1704).

As objeções filosóficas de Berkeley são profundamente incisivas. Não obstante, o cálculo foi uma empresa enormemente bem-sucedida, e os matemáticos continuaram a usá-lo sem incorrer em erro.

2.2 Definição Rigorosa de Limites

Hoje em dia, a solução padrão ao problema anterior é livrar-se dos infinitesimais. Eis como.

[his:set:limits:sec](#)

Já vimos que, à medida que β fica menor, obtemos melhores aproximações do gradiente. De fato, à medida que β se aproxima arbitrariamente de 0, o valor de $f'(c)$ “tende sem limite” para o gradiente que queremos. Assim, em vez de considerar o que acontece *em* $\beta = 0$, precisamos apenas considerar a *tendência* de $f'(c)$ quando β se aproxima de 0.

Posto deste modo, o desafio geral é dar sentido a afirmações desta forma:

À medida que x se aproxima de c , $g(x)$ tende sem limite para ℓ .

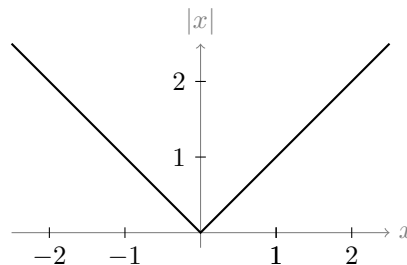
que podemos escrever de forma mais compacta assim:

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell.$$

No século XIX, sobre trabalho anterior de Cauchy, Weierstrass deu uma definição perfeitamente rigorosa desta expressão. A ideia é, de fato, que podemos tornar $g(x)$ tão próxima quanto queiramos de ℓ , tornando x adequadamente próximo de c . Mais precisamente, estipulamos que $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \ell$ significará:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \forall x (|x - c| < \delta \rightarrow |g(x) - \ell| < \varepsilon).$$

As barras verticais indicam aqui valor absoluto. Isto é, $|x| = x$ quando $x \geq 0$, e $|x| = -x$ quando $x < 0$; pode representar-se *essa* função como se segue:



A definição diz portanto, grosso modo, o seguinte: pode tornar o seu “erro” inferior a ε (isto é, $|g(x) - \ell| < \varepsilon$) escolhendo argumentos que distem no máximo δ de c (isto é, $|x - c| < \delta$).

Tendo definido a noção de limite, podemos usá-la para evitar por completo os infinitesimais, estipulando que o gradiente de f em c é dado por:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(c+x) - f(c)}{x} \right) \text{ quando um limite existe.}$$

É importante, no entanto, compreender por que a nossa definição precisa da ressalva “quando um limite existe”. Para um exemplo simples, considere $f(x) = |x|$, cujo gráfico acabamos de ver. Evidentemente, $f'(0)$ está mal definida: se nos aproximamos de 0 “pela direita”, o gradiente é sempre 1; se nos aproximamos “pela esquerda”, o gradiente é sempre -1 ; logo o limite não está definido. Como tal, podemos acrescentar que uma função f é *diferenciável* em x se e só se tal limite existe.

Já vimos como tratar a diferenciação usando a noção de *limite*. Podemos usar a mesma noção para definir a ideia de função *contínua*. (Bolzano tinha, com efeito, percebido isto já por 1817.) O tratamento Cauchy–Weierstrass da continuidade é o seguinte. Grosso modo: uma função f é contínua (num ponto) desde que, ao exigir um certo grau de precisão relativamente à saída da função, se possa garantir essa precisão insistindo num certo grau de precisão relativamente à entrada da função. Mais precisamente: f é contínua em c desde que, à medida que x tende para zero, a diferença entre $f(c+x)$ e $f(c)$ tenda para 0. De outro modo: f é *contínua* em c se e só se $f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$.

Ir mais longe levar-nos-ia apenas para a análise real, quando o nosso tema é a teoria dos conjuntos. Por isso, agora devemos fazer uma pausa e enunciar a moral. Durante o século XIX, os matemáticos aprenderam a passar sem infinitesimais, invocando uma noção rigorosamente definida de *limite*.

2.3 Patologias

his;set:pathology:
sec

Contudo, a definição de um *limite* acabou por permitir construções bastante “patológicas”.

Por volta da década de 1830, Bolzano descobriu uma função que era *contínua em todo o lado*, mas *não diferenciável em parte nenhuma*. (Infelizmente, Bolzano nunca publicou isto; a ideia foi pela primeira vez encontrada pelos matemáticos em 1872, graças à descoberta independente de Weierstrass da mesma ideia.)¹ Isto era, no mínimo, bastante surpreendente. É fácil encontrar funções, como $|x|$, que são contínuas em todo o lado mas não diferenciáveis num dado ponto. Mas uma função contínua em todo o lado e *não diferenciável em parte nenhuma* é uma criatura muito diferente. Considere, por um momento, como tentaria desenhar tal função. Para garantir que é contínua, deve consegui-la desenhar sem nunca levantar a caneta da página; mas para garantir que não é diferenciável em nenhum ponto, teria de mudar abruptamente a direção da caneta, constantemente.

¹A história está documentada em notas de rodapé extremamente minuciosas do artigo da Wikipédia sobre a função de Weierstrass.

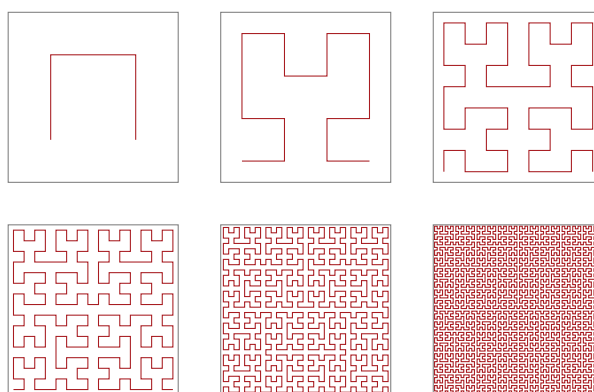
Seguiram-se mais “patologias”. A 5 de janeiro de 1874, Cantor escreveu uma carta a Dedekind, colocando o problema:

Poderá uma superfície (digamos um quadrado incluindo o seu contorno) estar correlacionada biunivocamente com uma linha (digamos uma reta incluindo as extremidades) de modo que a cada ponto da superfície corresponda um ponto da linha e, reciprocamente, a cada ponto da linha corresponda um ponto da superfície?

Ainda me parece, de momento, que a resposta a esta questão é muito difícil—embora aqui também se esteja tão impelido a dizer *não* que se queira considerar quase supérflua a prova. [Citado em [Gouvêa 2011](#)]

Mas, em 1877, Cantor provou que estivera errado. De fato, uma linha e um quadrado têm exatamente o mesmo número de pontos. Escreveu a 29 de junho de 1877 a Dedekind “*je le vois, mais je ne le crois pas*”; isto é, “eu vejo, mas não acredito”. Na “história recebida” da matemática, isto é frequentemente tomado como indicador de quão *literalmente incríveis* eram estes novos resultados para os matemáticos da época. (A correspondência é apresentada em [Gouvêa \(2011\)](#), e voltaremos a ela em [Seção 2.4](#). A prova de Cantor está esboçada em [Seção 2.5](#).)

Inspirado pelo resultado de Cantor, Peano começou a considerar se seria possível mapear suavemente uma linha sobre um plano. Isto seria uma *curva que preenche o espaço*. Em 1890, Peano construiu precisamente tal curva. Isto é verdadeiramente contraintuitivo: Euclides tinha definido uma linha como “comprimento sem largura” (Livro I, Definição 2), mas Peano mostrara que, enrolando adequadamente uma linha, o seu comprimento pode transformar-se em largura. Em 1891, Hilbert descreveu uma curva preenchedora de espaço ligeiramente mais intuitiva, juntamente com algumas figuras que a ilustram. A curva é construída em sequência, e eis as primeiras seis fases da construção:



No limite—uma noção que, entretanto, recebera definição rigorosa—todo o quadrado fica inteiramente preenchido na cor [vermelho](#). E, de passagem, a curva de Hilbert é contínua em todo o lado mas não diferenciável em parte nenhuma; intuitivamente porque, no limite infinito, a função muda abruptamente de direção a cada instante. (Esboçaremos a construção de Hilbert com mais pormenor na [Seção 2.6](#).)

Para o bem ou para o mal, estas construções geométricas “patológicas” foram tratadas como motivo para duvidar de apelos à intuição geométrica. Tornaram-se algo próximo de *propaganda* por uma nova forma de fazer matemática, que culminaria na teoria dos conjuntos. Na construção posterior do mito em torno do assunto, repetia-se, frequentemente, que estes resultados eram ao mesmo tempo perfeitamente rigorosos e perfeitamente chocantes. Serviam portanto um duplo propósito: como aviso contra confiar na intuição geométrica, e como uma demonstração da fertilidade de novas formas de pensar.

2.4 Mais Mito do que História?

his:set:mythology:
sec

Com mais de um século de perspectiva, ao olhar para estes acontecimentos, devemos ter cuidado para não tomar estes veredictos por adquiridos. Os resultados eram certamente novos, entusiasmantes e surpreendentes. Mas quão verdadeiramente chocantes eram? E demonstraram realmente que não devemos confiar na intuição geométrica?

Quanto ao choque, Gouvêa (2011) observa que a célebre nota de Cantor a Dedekind, “*je le vois, mais je ne le crois pas*” é tirada um tanto fora de contexto. Eis mais desse contexto (citado de Gouvêa):

Peço desculpa pelo meu zelo pelo assunto se lhe faço tantas exigências à sua bondade e paciência; as comunicações que ultimamente lhe enviei são mesmo para mim tão inesperadas, tão novas, que não posso ter paz de espírito até obter de si, amigo honrado, uma decisão sobre a sua correcção. Enquanto não concordar comigo, só posso dizer: *je le vois, mais je ne le crois pas*.

Cantor sabia que o seu resultado era “tão inesperado, tão novo”. Mas é duvidoso que alguma vez achasse o seu resultado *inacreditável*. Como Gouvêa observa, estava simplesmente a pedir a Dedekind que verificasse a prova que oferecera.

Quanto à intuição geométrica: Peano publicou a sua curva preenchedora de espaço sem incluir quaisquer diagramas. Mas quando Hilbert publicou a sua curva, explicou o seu propósito: daria aos leitores um modo claro de compreender o resultado de Peano, se “se servirem da seguinte intuição geométrica”; após o que incluiu uma série de *diagramas* tal como os fornecidos em Seção 2.3.

De modo mais geral: embora os diagramas tenham caído um tanto em desuso nas provas publicadas, não há como escapar ao fato de que os matemáticos *com frequência* usam diagramas ao provar resultados. (Grosso modo: bons matemáticos sabem quando podem confiar na intuição geométrica.)

Em suma: não acredite na *exaltação*; ou, pelo menos, não a aceite por adquirido. Para mais sobre isto, pode ler Giaquinto (2007).

2.5 Cantor na Reta e no Plano

his:set:cantorplane:
sec

Algumas circunstâncias em torno da prova de Schröder-Bernstein relacionam-se com a história que discutimos em Seção 2.3. Recordemos que, em 1877, Cantor

provou que há tantos pontos num quadrado quanto num dos seus lados. Aqui apresentaremos a sua prova (primeira tentativa).

Seja L o intervalo unitário, isto é, o conjunto de pontos $[0, 1]$. Seja S o quadrado unitário, isto é, o conjunto de pontos $L \times L$. Nestes termos, Cantor provou que $L \approx S$. Escreveu uma nota a Dedekind, que continha essencialmente o seguinte argumento.

Teorema 2.1. $L \approx S$

*his:set:cantorplane:
thm:cantorplane*

Prova: primeira parte.. Fixemos $a, b \in L$. Escrevamos a e b em notação binária, de modo que temos sequências infinitas de 0s e 1s, $a_1, a_2, \dots$, e $b_1, b_2, \dots$, tais que:

$$\begin{aligned} a &= 0.a_1a_2a_3a_4\dots \\ b &= 0.b_1b_2b_3b_4\dots \end{aligned}$$

Consideremos a função $f: S \rightarrow L$ dada por

$$f(a, b) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4\dots$$

A função f é **uma injeção**, pois se $f(a, b) = f(c, d)$, então $a_n = c_n$ e $b_n = d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $a = c$ e $b = d$. $\square$

Infelizmente, como Dedekind apontou a Cantor, isto não responde à questão original. Considere-se $0.\dot{1}\dot{0} = 0.10101010\dots$. Para que $f(a, b) = 0.\dot{1}\dot{0}$, seria preciso:

$$\begin{aligned} a &= 0.\dot{1}\dot{1} = 0.111111\dots \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Mas $a = 0.\dot{1}\dot{1} = 1$. Assim, quando dizemos “escrever a e b em notação binária”, temos de escolher *qual* notação usar; e, como f deve ser uma *função*, só podemos usar *uma* das duas notações possíveis. Mas se, por exemplo, usarmos a notação simples e escrevermos a como “1.000...”, então não existe par $\langle a, b \rangle$ tal que $f(a, b) = 0.\dot{1}\dot{0}$.

Em resumo: Dedekind observou que, dada a possibilidade de certas expansões binárias periódicas, a função f de Cantor é **uma injeção** mas *não* é **uma sobrejeção**. Cantor tinha mostrado apenas que $S \preceq L$ e *não* que $S \approx L$.

Cantor respondeu a Dedekind quase de imediato, sugerindo essencialmente que a prova poderia completar-se assim:

Prova: completada.. Mostramos que $S \preceq L$. Mas é óbvio que existe **uma injeção** de L para S : basta “deitar” a reta sobre um lado do quadrado. Logo $L \preceq S$ e $S \preceq L$. Pelo teorema de Schröder–Bernstein (??), $L \approx S$. $\square$

Claro que Cantor não podia justificar a última linha nestes termos, pois o teorema de Schröder–Bernstein ainda não estava provado. De fato, embora Cantor viesse a formulá-lo como conjectura geral, só viria a ser provado de modo satisfatório em 1897. (E assim, mais tarde em 1877, Cantor deu outra prova de **Teorema 2.1**, que não passava por Schröder–Bernstein.)

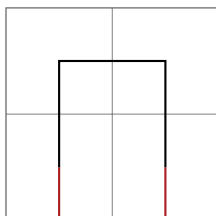
2.6 Apêndice: Curvas Preenchedoras de Espaço de Hilbert

his:set:hilbertcurve:
sec

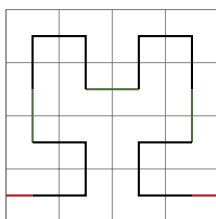
No capítulo [Seção 2.3](#), mencionamos que a prova de Cantor de que uma reta e um quadrado têm exatamente o mesmo número de pontos ([Teorema 2.1](#)) levou Peano a perguntar se poderia existir uma *curva* que preenchesse o espaço. Obteve resposta afirmativa em 1890. Nesta seção explicamos (de modo informal) como construir a curva preenchedora de espaço de Hilbert (com um pequeno ajuste).²

Temos de definir uma função, h , como limite de uma sequência de funções $h_1, h_2, h_3, \dots$. Primeiro descrevemos a construção. Depois mostramos que preenche o espaço. Depois mostramos que é uma curva.

Tomaremos a imagem de h como sendo o quadrado unitário, S . Eis a nossa primeira aproximação a h , isto é, h_1 :



Para orientação, impusemos uma grelha 2×2 ao quadrado. Podemos pensar na curva como começando no quadrante inferior esquerdo, indo para o superior esquerdo, depois para o superior direito e finalmente para o inferior direito. Eis a segunda etapa da construção, isto é, h_2 :

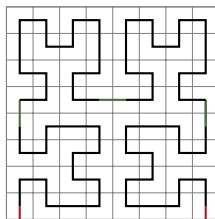


As cores diferentes ajudam a explicar como h_2 foi construída. Colocamos primeiro cópias reduzidas do trecho não-vermelho de h_1 no inferior esquerdo, superior esquerdo, superior direito e inferior direito do quadrado (traçadas a preto). Depois ligamos estas quatro figuras (com linhas verde). Por fim, ligamos a figura ao contorno do quadrado (com linhas vermelho).

Passamos a h_3 . Tal como h_2 foi feita a partir de quatro cópias ligadas e reduzidas do trecho não vermelho de h_1 , h_3 compõe-se de quatro cópias reduzidas

²Para uma explicação mais rigorosa, ver [Rose \(2010\)](#). O ajuste consiste em incluir as partes vermelhas das curvas abaixo. Isto torna ligeiramente mais fácil verificar que a curva é contínua.

do troço não vermelho de h_2 (a preto), que depois se unem (com linhas verde) e se ligam ao contorno do quadrado (com linhas vermelho).



Agora vê-se o padrão geral para definir h_{n+1} a partir de h_n . Por fim definimos a curva h em si considerando o limite ponto a ponto destas funções sucessivas $h_1, h_2, \dots$. Isto é, para cada $x \in S$:

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$$

Mostramos agora que esta curva preenche o espaço. Ao traçar h_n , impomos uma grelha $2^n \times 2^n$ sobre S . Pelo teorema de Pitágoras, a diagonal de cada célula da grelha tem comprimento:

$$\sqrt{(1/2^n)^2 + (1/2^n)^2} = 2^{(\frac{1}{2}-n)}$$

é evidente que h_n passa por todas as células. Logo cada ponto de S está a uma distância no máximo $2^{(\frac{1}{2}-n)}$ de algum ponto de h_n . Mas h é definida como o limite das funções $h_1, h_2, h_3, \dots$. Assim, a distância máxima de qualquer ponto a h é dada por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(\frac{1}{2}-n)} = 0.$$

Ou seja: todo o ponto de S está à distância 0 de h . Em outras palavras, todo o ponto de S situa-se *sobre* a curva. Logo h preenche o espaço!

Resta mostrar que h é, de fato, uma *curva*. Para isso é preciso definir o conceito. A definição moderna baseia-se na de Jordan, de 1887 (isto é, poucos anos antes da primeira curva preenchedora de espaço):

Definição 2.2. Uma curva é uma aplicação contínua de L para $\mathbb{R}^2$.

Isto é bastante intuitivo: uma curva é, intuitivamente, uma aplicação “suave” que leva uma reta canônica para o plano $\mathbb{R}^2$. A nossa função h é de fato uma aplicação de L para $\mathbb{R}^2$. Logo só precisamos de mostrar que h é contínua. Definimos continuidade em [Seção 2.2](#) com a notação ε/δ . Em linguagem corrente, queremos estabelecer o seguinte: *Se especificar um ponto p em S , juntamente com qualquer nível de precisão ε , podemos encontrar um intervalo aberto de L tal que, dado qualquer x nesse intervalo, $h(x)$ fica a uma distância inferior a ε de p .*

Assim: suponhamos que p e ε estão fixos. Isto corresponde, em efeito, a traçar um círculo com centro p e raio ε sobre S . (O círculo pode sair para

fora de S , mas não importa.) Recordemos que, ao descrever h_n , traçamos uma grelha $2^n \times 2^n$ sobre S . É óbvio que, por pequeno que seja ε , existe algum n tal que alguma célula individual da grelha $2^n \times 2^n$ sobre S fica inteiramente dentro do círculo com centro p e raio ε .

Tomemos esse n , e seja I a maior parte aberta de L que h_n mapeia inteiramente para a célula relevante. (É claro que I existe, pois já notamos que h_n passa por todas as células da grelha $2^n \times 2^n$.) Basta agora mostrar que, sempre que $x \in I$, o ponto $h(x)$ pertence à mesma célula. E, para *isso*, basta mostrar que $h_m(x)$ pertence à mesma célula, para qualquer $m > n$. Mas isto é óbvio. Se considerarmos o que acontece com h_m para $m > n$, vemos que exatamente a “mesma parte” do intervalo unitário é mapeada para a mesma célula; apenas a descrevemos de modo cada vez mais esticado e sinuoso.

Créditos das Imagens

Georg Cantor, [p. 2](#): Retrato de Georg Cantor por Otto Zeth, cortesia do Arquivo Universitário, Martin-Luther-Universität Halle–Wittenberg. UAHW Rep. 40-VI, Nr. 3 Bild 102.

Kurt Gödel, [p. 5](#): Retrato de Kurt Gödel, c. 1925, fotógrafo desconhecido. Do Shelby White and Leon Levy Archives Center, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, EUA, em depósito na Biblioteca da Universidade de Princeton, Divisão de Manuscritos, Departamento de Livros Raros e Coleções Especiais, Kurt Gödel Papers, (C0282), Box 14b, #110000. O *Open Logic Project* obteve permissão do Arquivo do Instituto para usar esta imagem em materiais derivados do OLP não comerciais. É necessária autorização do Arquivo para qualquer outro uso.

Bertrand Russell, [p. 11](#): Retrato de Bertrand Russell, c. 1907, cortesia da Divisão William Ready de Arquivos e Coleções de Investigação, Biblioteca da McMaster University. Arquivos Bertrand Russell, Box 2, f. 4.

Alfred Tarski, [p. 12](#): Fotografia de passaporte de Alfred Tarski, 1939. Recortada e restaurada a partir de digitalização do passaporte de Tarski por Joel Fuller. Original cortesia da Biblioteca Bancroft, University of California, Berkeley. Alfred Tarski Papers, Banc MSS 84/49. O *Open Logic Project* obteve permissão para usar esta imagem em materiais derivados do OLP não comerciais. É necessária autorização da Biblioteca Bancroft para qualquer outro uso.

Ernst Zermelo, [p. 15](#): Retrato de Ernst Zermelo, c. 1922, cortesia da Abteilung für Handschriften und Seltene Drucke, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. D. Hilbert 754, Bl. 6 Nr. 25.

Referências Bibliográficas

- Andrásfai, Béla. 1986. Rózsa (Rosa) Péter. *Periodica Polytechnica Electrical Engineering* 30(2-3): 139–145. URL <http://www.pp.bme.hu/ee/article/view/4651>.
- Aspray, William. 1984. The Princeton mathematics community in the 1930s: Alonzo Church. URL http://www.princeton.edu/mudd/finding_aids/mathoral/pmc05.htm. Interview.
- Baaz, Matthias, Christos H. Papadimitriou, Hilary W. Putnam, Dana S. Scott, and Charles L. Harper Jr. 2011. *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics: Horizons of Truth*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Berkeley, George. 1734. *The Analyst; or, a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*.
- Church, Alonzo. 1936a. A note on the Entscheidungsproblem. *The Journal of Symbolic Logic* 1: 40–41.
- Church, Alonzo. 1936b. An unsolvable problem of elementary number theory. *American Journal of Mathematics* 58: 345–363.
- Corcoran, John. 1983. *Logic, Semantics, Metamathematics*. Indianapolis: Hackett, 2nd ed.
- Csicsery, George. 2016. Zala films: Julia Robinson and Hilbert’s tenth problem. URL <http://www.zalafilms.com/films/juliarobinson.html>.
- Dauben, Joseph. 1990. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton: Princeton University Press.
- Davis, Martin, Hilary Putnam, and Julia Robinson. 1961. The decision problem for exponential Diophantine equations. *Annals of Mathematics* 74(3): 425–436. URL <http://www.jstor.org/stable/1970289>.
- Dick, Auguste. 1981. *Emmy Noether 1882–1935*. Boston: Birkhäuser.
- du Sautoy, Marcus. 2014. A brief history of mathematics: Georg Cantor. URL <http://www.bbc.co.uk/programmes/b00ss1j0>. Audio Recording.

- Duncan, Arlene. 2015. The Bertrand Russell Research Centre. URL <http://russell.mcmaster.ca/>.
- Ebbinghaus, Heinz-Dieter. 2015. *Ernst Zermelo: An Approach to his Life and Work*. Berlin: Springer-Verlag.
- Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Craig G. Fraser, and Akihiro Kanamori. 2010. *Ernst Zermelo. Collected Works*, vol. 1. Berlin: Springer-Verlag.
- Ebbinghaus, Heinz-Dieter and Akihiro Kanamori. 2013. *Ernst Zermelo: Collected Works*, vol. 2. Berlin: Springer-Verlag.
- Enderton, Herbert B. 2019. Alonzo Church: Life and Work. In *The Collected Works of Alonzo Church*, eds. Tyler Burge and Herbert B. Enderton. Cambridge, MA: MIT Press.
- Feferman, Anita and Solomon Feferman. 2004. *Alfred Tarski: Life and Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Feferman, Solomon. 1994. Julia Bowman Robinson 1919–1985. *Biographical Memoirs of the National Academy of Sciences* 63: 1–28. URL <http://www.nasonline.org/publications/biographical-memoirs/memoir-pdfs/robinson-julia.pdf>.
- Feferman, Solomon, John W. Dawson Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay, and Jean van Heijenoort. 1986. *Kurt Gödel: Collected Works. Vol. 1: Publications 1929–1936*. Oxford: Oxford University Press.
- Feferman, Solomon, John W. Dawson Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay, and Jean van Heijenoort. 1990. *Kurt Gödel: Collected Works. Vol. 2: Publications 1938–1974*. Oxford: Oxford University Press.
- Frey, Holly and Tracy V. Wilson. 2015. Stuff you missed in history class: Emmy Noether, mathematics trailblazer. URL <https://www.iheart.com/podcast/stuff-you-missed-in-history-cl-21124503/episode/emmy-noether-mathematics-trailblazer-30207491/>. Podcast audio.
- Gentzen, Gerhard. 1935a. Untersuchungen über das logische Schließen I. *Mathematische Zeitschrift* 39: 176–210. English translation in Szabo (1969), pp. 68–131.
- Gentzen, Gerhard. 1935b. Untersuchungen über das logische Schließen II. *Mathematische Zeitschrift* 39: 176–210, 405–431. English translation in Szabo (1969), pp. 68–131.
- Giaquinto, Marcus. 2007. *Visual Thinking in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

- Gödel, Kurt. 1929. Über die Vollständigkeit des Logikkalküls [On the completeness of the calculus of logic]. Dissertation, Universität Wien. Reprinted and translated in [Feferman et al. \(1986\)](#), pp. 60–101.
- Gödel, Kurt. 1931. über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I [On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related systems I]. *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38: 173–198. Reprinted and translated in [Feferman et al. \(1986\)](#), pp. 144–195.
- Gouvêa, Fernando Q. 2011. Was Cantor surprised? *American Mathematical Monthly* 118(3): 198–209.
- Grattan-Guinness, Ivor. 1971. Towards a biography of Georg Cantor. *Annals of Science* 27(4): 345–391.
- Hilbert, David. 1891. Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Mathematische Annalen* 38(3): 459–460.
- Hodges, Andrew. 2014. *Alan Turing: The Enigma*. London: Vintage.
- Institute, Perimeter. 2015. Emmy Noether: Her life, work, and influence. URL <https://www.youtube.com/watch?v=tNNyAyMRsgE>. Video Lecture.
- Irvine, Andrew David. 2015. Sound clips of Bertrand Russell speaking. URL <http://plato.stanford.edu/entries/russell/russell-soundclips.html>.
- Jacobson, Nathan. 1983. *Emmy Noether: Gesammelte Abhandlungen—Collected Papers*. Berlin: Springer-Verlag.
- John Dawson, Jr. 1997. *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*. Boca Raton: CRC Press.
- LibriVox. n.d. Bertrand Russell. URL https://librivox.org/author/1508?primary_key=1508&search_category=author&search_page=1&search_form=get_results. Collection of public domain audiobooks.
- Linsenmayer, Mark. 2014. The partially examined life: Gödel on math. URL <http://www.partiallyexaminedlife.com/2014/06/16/ep95-godel/>. Podcast audio.
- MacFarlane, John. 2015. Alonzo Church’s JSL reviews. URL <http://johnmacfarlane.net/church.html>.
- Matijasevich, Yuri. 1992. My collaboration with Julia Robinson. *The Mathematical Intelligencer* 14(4): 38–45.
- Menzler-Trott, Eckart. 2007. *Logic’s Lost Genius: The Life of Gerhard Gentzen*. Providence: American Mathematical Society.

- O'Connor, John J. and Edmund F. Robertson. 2014. Rózsa Péter. URL <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Peter.html>.
- Peano, Giuseppe. 1890. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen* 36(1): 157–60.
- Péter, Rózsa. 1935a. Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion. *Mathematische Annalen* 110: 612–632.
- Péter, Rózsa. 1935b. Konstruktion nichtrekursiver Funktionen. *Mathematische Annalen* 111: 42–60.
- Péter, Rózsa. 1951. *Rekursive Funktionen*. Budapest: Akadémiai Kiado. English translation in (Péter, 1967).
- Péter, Rózsa. 1967. *Recursive Functions*. New York: Academic Press.
- Péter, Rózsa. 2010. *Playing with Infinity*. New York: Dover. URL https://books.google.ca/books?id=6V3wNs4uv_4C&lpg=PP1&ots=BkQZaHcR99&lr&pg=PP1#v=onepage&q&f=false.
- Radiolab. 2012. The Turing problem. URL <http://www.radiolab.org/story/193037-turing-problem/>. Podcast audio.
- Reid, Constance. 1986. The autobiography of Julia Robinson. *The College Mathematics Journal* 17: 3–21.
- Reid, Constance. 1996. *Julia: A Life in Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press. URL <https://books.google.ca/books?id=1RtSzQyHf9UC&lpg=PP1&pg=PP1#v=onepage&q&f=false>.
- Robinson, Julia. 1949. Definability and decision problems in arithmetic. *The Journal of Symbolic Logic* 14(2): 98–114. URL <http://www.jstor.org/stable/2266510>.
- Robinson, Julia. 1996. *The Collected Works of Julia Robinson*. Providence: American Mathematical Society.
- Rose, Daniel. 2012. A song about Georg Cantor. URL <https://www.youtube.com/watch?v=QUP5Z4Fb5k4>. Audio Recording.
- Rose, Nicholas J. 2010. Hilbert-type space-filling curves. URL <https://web.archive.org/web/20151010184939/http://www4.ncsu.edu/~njrose/pdfFiles/HilbertCurve.pdf>.
- Russell, Bertrand. 1905. On denoting. *Mind* 14: 479–493.
- Russell, Bertrand. 1967. *The Autobiography of Bertrand Russell*, vol. 1. London: Allen and Unwin.
- Russell, Bertrand. 1968. *The Autobiography of Bertrand Russell*, vol. 2. London: Allen and Unwin.

- Russell, Bertrand. 1969. *The Autobiography of Bertrand Russell*, vol. 3. London: Allen and Unwin.
- Russell, Bertrand. n.d. Bertrand Russell on smoking. URL https://www.youtube.com/watch?v=80oLTiVW_1c. Video Interview.
- Segal, Sanford L. 2014. *Mathematicians under the Nazis*. Princeton: Princeton University Press.
- Sigmund, Karl, John Dawson, Kurt Mühlberger, Hans Magnus Enzensberger, and Juliette Kennedy. 2007. Kurt Gödel: Das Album–The Album. *The Mathematical Intelligencer* 29(3): 73–76.
- Smith, Peter. 2013. *An Introduction to Gödel's Theorems*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Sykes, Christopher. 1992. BBC Horizon: The strange life and death of Dr. Turing. URL <https://www.youtube.com/watch?v=gyusnGbBSHE>.
- Szabo, Manfred E. 1969. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam: North-Holland.
- Takeuti, Gaisi, Nicholas Passell, and Mariko Yasugi. 2003. *Memoirs of a Proof Theorist: Gödel and Other Logicians*. Singapore: World Scientific.
- Tamassy, Istvan. 1994. Interview with Róza Péter. *Modern Logic* 4(3): 277–280.
- Tarski, Alfred. 1981. *The Collected Works of Alfred Tarski*, vol. I–IV. Basel: Birkhäuser.
- Theelen, Andre. 2012. Lego turing machine. URL <https://www.youtube.com/watch?v=FTSAiF9AHN4>.
- Turing, Alan M. 1937. On computable numbers, with an application to the “Entscheidungsproblem”. *Proceedings of the London Mathematical Society, 2nd Series* 42: 230–265.
- Tyldum, Morten. 2014. The imitation game. Motion picture.
- Wang, Hao. 1990. *Reflections on Kurt Gödel*. Cambridge: MIT Press.
- Zermelo, Ernst. 1904. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Mathematische Annalen* 59: 514–516. English translation in (Ebbinghaus et al., 2010, pp. 115–119).
- Zermelo, Ernst. 1908. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen* 65(2): 261–281. English translation in (Ebbinghaus et al., 2010, pp. 189–229).