

syn.1 Leitura Única

fol:syn:unq:
sec

A maneira como definimos **fórmulas** garante que toda **fórmula** tem uma *leitura única*, isto é, há essencialmente apenas uma maneira de construí-la de acordo com nossas regras de formação para **fórmulas** e apenas uma maneira de “interpretá-la”. Se não fosse assim, teríamos **fórmulas** ambíguas, isto é, **fórmulas** que têm mais de uma leitura ou interpretação—e isso é claramente algo que queremos evitar. Mas, mais importante, sem essa propriedade, a maioria das definições e provas que vamos dar não funcionaria.

explanation

Talvez a melhor maneira de deixar isso claro seja ver o que aconteceria se tivéssemos dado regras ruins para formar **fórmulas** que não garantissem a leitura única. Por exemplo, poderíamos ter esquecido os parênteses nas regras de formação para conectivos, por exemplo, poderíamos ter permitido isto:

Se φ e ψ são **fórmulas**, então $\varphi \rightarrow \psi$ também é.

Partindo de uma fórmula atômica θ , isso nos permitiria formar $\theta \rightarrow \theta$. A partir disso, juntamente com θ , obteríamos $\theta \rightarrow \theta \rightarrow \theta$. Mas há duas maneiras de fazer isso:

1. Tomamos θ como φ e $\theta \rightarrow \theta$ como ψ .
2. Tomamos φ como $\theta \rightarrow \theta$ e ψ é θ .

Correspondentemente, há duas maneiras de “ler” a **fórmula** $\theta \rightarrow \theta \rightarrow \theta$. Ela é da forma $\psi \rightarrow \chi$ onde ψ é θ e χ é $\theta \rightarrow \theta$, mas *ela é também* da forma $\psi \rightarrow \chi$ com ψ sendo $\theta \rightarrow \theta$ e χ sendo θ .

Se isso acontece, nossas definições nem sempre funcionarão. Por exemplo, quando definimos o **operador principal** de uma fórmula, dizemos: em uma fórmula da forma $\psi \rightarrow \chi$, o **operador principal** é a ocorrência indicada de $\rightarrow$. Mas se podemos casar a fórmula $\theta \rightarrow \theta \rightarrow \theta$ com $\psi \rightarrow \chi$ das duas maneiras diferentes mencionadas acima, então em um caso obtemos a primeira ocorrência de $\rightarrow$ como o **operador principal**, e no segundo caso a segunda ocorrência. Mas pretendemos que o **operador principal** seja uma *função* da **fórmula**, isto é, toda **fórmula** deve ter exatamente uma ocorrência de **operador principal**.

Lema syn.1. *O número de parênteses esquerdos e direitos em a fórmula φ é igual.*

Prova. Provamos isso por indução sobre a maneira como φ é construída. Isso requer duas coisas: (a) Temos primeiro que provar que todas as fórmulas atômicas têm a propriedade em questão (a base da indução). (b) Então temos que provar que, quando construímos novas fórmulas a partir de fórmulas dadas, as novas fórmulas têm a propriedade, desde que as antigas a tenham.

Seja $l(\varphi)$ o número de parênteses esquerdos, e $r(\varphi)$ o número de parênteses direitos em φ , e $l(t)$ e $r(t)$ similarmente o número de parênteses esquerdos e direitos em um termo t .

Problema syn.1. Prove que, para qualquer termo t , $l(t) = r(t)$.

1. $\varphi \equiv \perp$: φ tem 0 parênteses esquerdos e 0 parênteses direitos.
2. $\varphi \equiv \top$: φ tem 0 parênteses esquerdos e 0 parênteses direitos.
3. $\varphi \equiv R(t_1, \dots, t_n)$: $l(\varphi) = 1 + l(t_1) + \dots + l(t_n) = 1 + r(t_1) + \dots + r(t_n) = r(\varphi)$. Aqui usamos o fato, deixado como exercício, de que $l(t) = r(t)$ para qualquer termo t .
4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$: $l(\varphi) = l(t_1) + l(t_2) = r(t_1) + r(t_2) = r(\varphi)$.
5. $\varphi \equiv \neg\psi$: Por hipótese de indução, $l(\psi) = r(\psi)$. Assim $l(\varphi) = l(\psi) = r(\psi) = r(\varphi)$.
6. $\varphi \equiv (\psi * \chi)$: Por hipótese de indução, $l(\psi) = r(\psi)$ e $l(\chi) = r(\chi)$. Assim $l(\varphi) = 1 + l(\psi) + l(\chi) = 1 + r(\psi) + r(\chi) = r(\varphi)$.
7. $\varphi \equiv \forall x \psi$: Por hipótese de indução, $l(\psi) = r(\psi)$. Assim, $l(\varphi) = l(\psi) = r(\psi) = r(\varphi)$.
8. $\varphi \equiv \exists x \psi$: Analogamente. □

Definição syn.2 (Prefixo próprio). Uma cadeia de símbolos ψ é um *prefixo próprio* de uma cadeia de símbolos φ se a concatenação de ψ e uma cadeia de símbolos não vazia resulta em φ .

Lema syn.3. Se φ é *a fórmula*, e ψ é um *prefixo próprio* de φ , então ψ não é *a fórmula*. fol:syn:unq:
lem:no-prefix

Prova. Exercício. □

Problema syn.2. Prove **Lema syn.3**.

Proposição syn.4. Se φ é uma *fórmula* atômica, então ela satisfaz uma, e apenas uma, das seguintes condições. fol:syn:unq:
prop:unique-atomic

1. $\varphi \equiv \perp$.
2. $\varphi \equiv \top$.
3. $\varphi \equiv R(t_1, \dots, t_n)$ onde R é um *símbolo de predicado* de n lugares, $t_1, \dots, t_n$ são termos, e cada um de $R, t_1, \dots, t_n$ é determinado de forma única.
4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$ onde t_1 e t_2 são termos determinados de forma única.

Prova. Exercício. □

Problema syn.3. Prove **Proposição syn.4** (Dica: Formule e prove uma versão de **Lema syn.3** para termos.)

Proposição syn.5 (Leitura Única). *Toda fórmula satisfaz uma, e apenas uma, das seguintes condições.*

1. φ é atômica.
2. φ é da forma $\neg\psi$.
3. φ é da forma $(\psi \wedge \chi)$.
4. φ é da forma $(\psi \vee \chi)$.
5. φ é da forma $(\psi \rightarrow \chi)$.
6. φ é da forma $(\psi \leftrightarrow \chi)$.
7. φ é da forma $\forall x\psi$.
8. φ é da forma $\exists x\psi$.

Além disso, em cada caso ψ , ou ψ e χ , são determinados de forma única. Isso significa que, por exemplo, não há pares diferentes ψ, χ e ψ', χ' tais que φ seja ao mesmo tempo da forma $(\psi \rightarrow \chi)$ e $(\psi' \rightarrow \chi')$.

Prova. As regras de formação exigem que, se a fórmula não é atômica, ela deve começar com um parêntese de abertura ($($, $\neg$, ou um quantificador. Por outro lado, toda fórmula que começa com um dos seguintes símbolos deve ser atômica: a símbolo de predicado, a símbolo de função, a símbolo de constante, $\perp$, $\top$.

Então, na verdade só temos que mostrar que se φ é da forma $(\psi * \chi)$ e também da forma $(\psi' *' \chi')$, então $\psi \equiv \psi'$, $\chi \equiv \chi'$, e $* = *'$.

Então suponha que tanto $\varphi \equiv (\psi * \chi)$ quanto $\varphi \equiv (\psi' *' \chi')$. Então ou $\psi \equiv \psi'$ ou não. Se for, claramente $* = *'$ e $\chi \equiv \chi'$, pois elas então são subcadeias de φ que começam no mesmo lugar e têm o mesmo comprimento. O outro caso é $\psi \not\equiv \psi'$. Como ψ e ψ' são ambas subcadeias de φ que começam no mesmo lugar, uma deve ser um prefixo próprio da outra. Mas isso é impossível por **Lema syn.3.** $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas