

syn.1 Substituição

fol:syn:sub:
sec

Definição syn.1 (Substituição em um termo). Definimos $s[t/x]$, o resultado de *substituir* t por toda ocorrência de x em s , recursivamente:

1. $s \equiv c$: $s[t/x]$ é simplesmente s .
2. $s \equiv y$: $s[t/x]$ é também simplesmente s , desde que y seja uma variável e $y \neq x$.
3. $s \equiv x$: $s[t/x]$ é t .
4. $s \equiv f(t_1, \dots, t_n)$: $s[t/x]$ é $f(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$.

Definição syn.2. Um termo t está *livre para* x em φ se nenhuma das ocorrências livres de x em φ ocorre no escopo de um quantificador que liga uma variável em t .

Exemplo syn.3.

1. v_8 está livre para v_1 em $\exists v_3 A_4^2(v_3, v_1)$
2. $f_1^2(v_1, v_2)$ não está livre para v_0 em $\forall v_2 A_4^2(v_0, v_2)$

Definição syn.4 (Substituição em a fórmula). Se φ é a fórmula, x é a variável, e t é um termo livre para x em φ , então $\varphi[t/x]$ é o resultado de substituir t por todas as ocorrências livres de x em φ .

1. $\varphi \equiv \perp$: $\varphi[t/x]$ é $\perp$.
2. $\varphi \equiv \top$: $\varphi[t/x]$ é $\top$.
3. $\varphi \equiv P(t_1, \dots, t_n)$: $\varphi[t/x]$ é $P(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$.
4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$: $\varphi[t/x]$ é $t_1[t/x] = t_2[t/x]$.
5. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\varphi[t/x]$ é $\neg\psi[t/x]$.
6. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\varphi[t/x]$ é $(\psi[t/x] \wedge \chi[t/x])$.
7. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\varphi[t/x]$ é $(\psi[t/x] \vee \chi[t/x])$.
8. $\varphi \equiv (\psi \rightarrow \chi)$: $\varphi[t/x]$ é $(\psi[t/x] \rightarrow \chi[t/x])$.
9. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\varphi[t/x]$ é $(\psi[t/x] \leftrightarrow \chi[t/x])$.
10. $\varphi \equiv \forall y \psi$: $\varphi[t/x]$ é $\forall y \psi[t/x]$, desde que y seja uma variável diferente de x ; caso contrário $\varphi[t/x]$ é simplesmente φ .
11. $\varphi \equiv \exists y \psi$: $\varphi[t/x]$ é $\exists y \psi[t/x]$, desde que y seja uma variável diferente de x ; caso contrário $\varphi[t/x]$ é simplesmente φ .

explanation

Note que a substituição pode ser vácuca: Se x não ocorre de modo algum em φ , então $\varphi[t/x]$ é simplesmente φ .

A restrição de que t deve estar livre para x em φ é necessária para excluir casos como o seguinte. Se $\varphi \equiv \exists y x < y$ e $t \equiv y$, então $\varphi[t/x]$ seria $\exists y y < y$. Neste caso a variável livre y é “capturada” pelo quantificador $\exists y$ ao substituir, e isso é indesejável. Por exemplo, gostaríamos que fosse o caso que, sempre que $\forall x \psi$ vale, $\psi[t/x]$ também vale. Mas considere $\forall x \exists y x < y$ (aqui ψ é $\exists y x < y$). É uma sentença que é verdadeira a respeito, por exemplo, dos números naturais: para todo número x há um número y maior que ele. Se permitíssemos y como uma possível substituição para x , terminaríamos com $\psi[y/x] \equiv \exists y y < y$, que é falsa. Prevenimos isso exigindo que nenhuma das variáveis livres em t acabe sendo ligada por um quantificador em φ .

Frequentemente usamos a seguinte convenção para evitar notação incômoda: Se φ é a fórmula que pode conter a variável x livre, também escrevemos $\varphi(x)$ para indicar isso. Quando está claro qual φ e x temos em mente, e t é um termo (suposto estar livre para x em $\varphi(x)$), então escrevemos $\varphi(t)$ como abreviação de $\varphi[t/x]$. Assim, por exemplo, poderíamos dizer, “chamamos $\varphi(t)$ de uma instância de $\forall x \varphi(x)$.” Com isso queremos dizer que se φ é qualquer fórmula, x a variável, e t um termo que está livre para x em φ , então $\varphi[t/x]$ é uma instância de $\forall x \varphi$.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas