

syn.1 Subfórmulas

fol:syn:sbf: Frequentemente é útil falar sobre as **fórmulas** que “compõem” uma dada **fórmula**. explanation
sec Chamamos estas de suas **subfórmulas**. Qualquer **fórmula** conta como a **subfórmula** de si mesma; uma subfórmula de φ diferente do próprio φ é uma **subfórmula própria**.

Definição syn.1 (Subfórmula imediata). Se φ é a **fórmula**, as **subfórmulas imediatas** de φ são definidas indutivamente como segue:

1. **Fórmulas** atômicas não têm **subfórmulas** imediatas.
2. $\varphi \equiv \neg\psi$: A única **subfórmula** imediata de φ é ψ .
3. $\varphi \equiv (\psi * \chi)$: As **subfórmulas** imediatas de φ são ψ e χ ($*$ é qualquer um dos conectivos de dois lugares).
4. $\varphi \equiv \forall x \psi$: A única **subfórmula** imediata de φ é ψ .
5. $\varphi \equiv \exists x \psi$: A única **subfórmula** imediata de φ é ψ .

Definição syn.2 (Subfórmula própria). Se φ é a **fórmula**, as **subfórmulas próprias** de φ são definidas recursivamente como segue:

1. **Fórmulas** atômicas não têm **subfórmulas** próprias.
2. $\varphi \equiv \neg\psi$: As **subfórmulas** próprias de φ são ψ juntamente com todas as **subfórmulas** próprias de ψ .
3. $\varphi \equiv (\psi * \chi)$: As **subfórmulas** próprias de φ são ψ , χ , juntamente com todas as **subfórmulas** próprias de ψ e as de χ .
4. $\varphi \equiv \forall x \psi$: As **subfórmulas** próprias de φ são ψ juntamente com todas as **subfórmulas** próprias de ψ .
5. $\varphi \equiv \exists x \psi$: As **subfórmulas** próprias de φ são ψ juntamente com todas as **subfórmulas** próprias de ψ .

Definição syn.3 (Subfórmula). As **subfórmulas** de φ são o próprio φ juntamente com todas as suas **subfórmulas** próprias.

Note a diferença sutil em como definimos **subfórmulas** imediatas e **subfórmulas** próprias. explanation
No primeiro caso, definimos diretamente as **subfórmulas** imediatas de uma fórmula φ para cada forma possível de φ . É uma definição explícita por casos, e os casos espelham a definição indutiva do conjunto de **fórmulas**. No segundo caso, também espelhamos a maneira como o conjunto de todas as **fórmulas** é definido, mas em cada caso também incluímos as **subfórmulas** próprias das **fórmulas** menores ψ , χ além dessas próprias **fórmulas**. Isso torna a definição *recursiva*. Em geral, uma definição de uma função sobre um conjunto definido indutivamente (no nosso caso, **fórmulas**) é recursiva se os casos

na definição da função fazem uso da própria função. Para ser bem definida, devemos garantir, no entanto, que só usamos os valores da função para argumentos que vêm “antes” daquele que estamos definindo—no nosso caso, ao definir “subfórmula própria” para $(\psi * \chi)$ usamos apenas as subfórmulas próprias das fórmulas “anteriores” ψ e χ .

Proposição syn.4. *Suponha que ψ é uma subfórmula de φ e χ é uma subfórmula de ψ . Então χ é uma subfórmula de φ . Em outras palavras, a relação de subfórmula é transitiva.* fol:syn:sbf: prop:subfrm-trans

Problema syn.1. Prove **Proposição syn.4.**

Proposição syn.5. *Suponha que φ é uma fórmula com n conectivos e quantificadores. Então φ tem no máximo $2n + 1$ subfórmulas.* fol:syn:sbf: prop:count-subfrms

Problema syn.2. Prove **Proposição syn.5.**

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas