

syn.1 Estruturas para Linguagens de Primeira Ordem

fol:syn:str:sec explanation

As linguagens de primeira ordem são, por si mesmas, *não interpretadas*: os símbolos de constante, símbolos de função e símbolos de predicado não têm nenhum significado específico associado a eles. Os significados são dados especificando-se a *estrutura*. Ela especifica o *domínio*, isto é, os objetos que os símbolos de constante denotam, sobre os quais os símbolos de função operam e sobre os quais os quantificadores variam. Além disso, ela especifica quais símbolos de constante denotam quais objetos, como a símbolo de função mapeia objetos para objetos, e a quais objetos os símbolos de predicado se aplicam. Estruturas são a base para as noções *semânticas* em lógica, por exemplo, a noção de consequência, validade, satisfatibilidade. Elas são chamadas de várias formas na literatura: “estruturas”, “interpretações” ou “modelos”.

Definição syn.1 (Estruturas). A estrutura $\mathfrak{M}$, para uma linguagem $\mathcal{L}$ de lógica de primeira ordem consiste nos seguintes elementos:

1. *Domínio*: um conjunto não vazio, $|\mathfrak{M}|$
2. *Interpretação dos símbolos de constante*: para cada símbolo de constante c de $\mathcal{L}$, um membro $c^{\mathfrak{M}} \in |\mathfrak{M}|$
3. *Interpretação dos símbolos de predicado*: para cada símbolo de predicado R de n lugares de $\mathcal{L}$ (distinto de $=$), uma relação de n lugares $R^{\mathfrak{M}} \subseteq |\mathfrak{M}|^n$
4. *Interpretação dos símbolos de função*: para cada símbolo de função f de n lugares de $\mathcal{L}$, uma função de n lugares $f^{\mathfrak{M}}: |\mathfrak{M}|^n \rightarrow |\mathfrak{M}|$

Exemplo syn.2. A estrutura $\mathfrak{M}$ para a linguagem da aritmética consiste em um conjunto, um elemento de $|\mathfrak{M}|$, $o^{\mathfrak{M}}$, como interpretação do símbolo de constante o , uma função de um lugar $r^{\mathfrak{M}}: |\mathfrak{M}| \rightarrow |\mathfrak{M}|$, duas funções de dois lugares $+^{\mathfrak{M}}$ e $\times^{\mathfrak{M}}$, ambas $|\mathfrak{M}|^2 \rightarrow |\mathfrak{M}|$, e uma relação de dois lugares $<^{\mathfrak{M}} \subseteq |\mathfrak{M}|^2$.

Um exemplo óbvio de tal estrutura é o seguinte:

1. $|\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$
2. $o^{\mathfrak{M}} = 0$
3. $r^{\mathfrak{M}}(n) = n + 1$ para todos $n \in \mathbb{N}$
4. $+^{\mathfrak{M}}(n, m) = n + m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$
5. $\times^{\mathfrak{M}}(n, m) = n \cdot m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$
6. $<^{\mathfrak{M}} = \{\langle n, m \rangle : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n < m\}$

A estrutura $\mathfrak{N}$ para $\mathcal{L}_A$ assim definida é chamada de *modelo padrão da aritmética*, porque interpreta as constantes não lógicas de $\mathcal{L}_A$ exatamente como se esperaria.

No entanto, há muitas outras **estruturas** possíveis para $\mathcal{L}_A$. Por exemplo, poderíamos tomar como domínio o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros em vez de $\mathbb{N}$, e definir as interpretações de 0 , 1 , $+$, $\times$, $<$ adequadamente. Mas também podemos definir estruturas para $\mathcal{L}_A$ que não têm nada, nem mesmo remotamente, a ver com números.

Exemplo syn.3. Uma estrutura $\mathfrak{M}$ para a linguagem $\mathcal{L}_Z$ da teoria dos conjuntos requer apenas um conjunto e uma única relação de dois lugares. Então, tecnicamente, por exemplo, o conjunto das pessoas mais a relação “ x é mais velho que y ” poderia ser usado como **a estrutura** para $\mathcal{L}_Z$, assim como $\mathbb{N}$ junto com $n \geq m$ para $n, m \in \mathbb{N}$.

Uma **estrutura** particularmente interessante para $\mathcal{L}_Z$ na qual os **membros** do domínio são de fato conjuntos, e a interpretação de $\in$ é de fato a relação “ x é **um membro** de y ” é a **estrutura** $\mathfrak{H}\mathfrak{F}$ dos *conjuntos hereditariamente finitos*:

1. $|\mathfrak{H}\mathfrak{F}| = \emptyset \cup \wp(\emptyset) \cup \wp(\wp(\emptyset)) \cup \wp(\wp(\wp(\emptyset))) \cup \dots;$
2. $\in^{\mathfrak{H}\mathfrak{F}} = \{\langle x, y \rangle : x, y \in |\mathfrak{H}\mathfrak{F}|, x \in y\}.$

digression

As estipulações que fazemos sobre o que conta como **a estrutura** impactam nossa lógica. Por exemplo, a escolha de impedir domínios vazios garante, dada a explicação usual de satisfação (ou verdade) para sentenças quantificadas, que $\exists x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$ é válida—isto é, uma verdade lógica. E a estipulação de que todos os **símbolos de constante** devem referir-se a um objeto no domínio garante que a generalização existencial é um padrão de inferência correto: $\varphi(a)$, portanto $\exists x \varphi(x)$. Se permitíssemos que nomes se referissem a algo fora do domínio, ou que não se referissem, então estaríamos a caminho de uma *lógica livre*, na qual a generalização existencial requer uma premissa adicional: $\varphi(a)$ e $\exists x x = a$, portanto $\exists x \varphi(x)$.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas