

Capítulo udf

Semântica da Lógica de Primeira Ordem

syn.1 Introdução

fol:syn:its:
sec

Dar o significado das expressões é o domínio da semântica. O conceito central em semântica é o de satisfação em **a estrutura**. **A estrutura** dá significado aos blocos de construção da linguagem: **a domínio** é um conjunto não vazio de objetos. Os quantificadores são interpretados como variando sobre esse domínio, aos **símbolos de constante** são atribuídos elementos no domínio, aos **símbolos de função** são atribuídas funções do **domínio** para si mesmo, e aos **símbolos de predicado** são atribuídas relações sobre o **domínio**. O **domínio** junto com as atribuições ao vocabulário básico constitui **a estrutura**. **Variáveis** podem aparecer em **fórmulas**, e para dar uma semântica, também temos que atribuir **membros** do **domínio** a elas—isto é uma atribuição de variáveis. A relação de satisfação, finalmente, reúne tudo isso. **A fórmula** pode ser satisfeita em **a estrutura** $\mathfrak{M}$ relativamente a uma atribuição de variáveis s , escrita como $\mathfrak{M}, s \models \varphi$. Essa relação também é definida por indução sobre a estrutura de φ , usando as tabelas de verdade para os conectivos lógicos para definir, por exemplo, a satisfação de $(\varphi \wedge \psi)$ em termos da satisfação (ou não) de φ e ψ . Acontece então que a atribuição de variáveis é irrelevante se **a fórmula** φ é **a sentença**, isto é, não tem variáveis livres, e assim podemos falar de **sentenças** sendo simplesmente satisfeitas (ou não) em **estruturas**.

Com base na relação de satisfação $\mathfrak{M} \models \varphi$ para **sentenças** podemos então definir as noções semânticas básicas de validade, consequência e satisfatibilidade. **A sentença** é válida, $\models \varphi$, se toda **estrutura** a satisfaz. Ela é consequência de um conjunto de **sentenças**, $\Gamma \models \varphi$, se toda **estrutura** que satisfaz todas as **sentenças** em Γ também satisfaz φ . E um conjunto de **sentenças** é satisfatível se alguma **estrutura** satisfaz todas as **sentenças** nele ao mesmo tempo. Como **fórmulas** são definidas indutivamente, e a satisfação é por sua vez definida por indução sobre a estrutura das **fórmulas**, podemos usar indução para provar propriedades de nossa semântica e para relacionar as noções semânticas definidas.

syn.2 Estruturas para Linguagens de Primeira Ordem

explanation As linguagens de primeira ordem são, por si mesmas, *não interpretadas*: os fol:syn:str:sec *símbolos de constante*, *símbolos de função* e *símbolos de predicado* não têm nenhum significado específico associado a eles. Os significados são dados especificando-se a *estrutura*. Ela especifica o *domínio*, isto é, os objetos que os *símbolos de constante* denotam, sobre os quais os *símbolos de função* operam e sobre os quais os quantificadores variam. Além disso, ela especifica quais *símbolos de constante* denotam quais objetos, como a *símbolo de função* mapeia objetos para objetos, e a quais objetos os *símbolos de predicado* se aplicam. *Estruturas* são a base para as noções *semânticas* em lógica, por exemplo, a noção de consequência, validade, satisfatibilidade. Elas são chamadas de várias formas na literatura: “estruturas”, “interpretações” ou “modelos”.

Definição syn.1 (Estruturas). A *estrutura* $\mathfrak{M}$, para uma linguagem $\mathcal{L}$ de lógica de primeira ordem consiste nos seguintes elementos:

1. *Domínio*: um conjunto não vazio, $|\mathfrak{M}|$
2. *Interpretação dos símbolos de constante*: para cada *símbolo de constante* c de $\mathcal{L}$, um *membro* $c^{\mathfrak{M}} \in |\mathfrak{M}|$
3. *Interpretação dos símbolos de predicado*: para cada *símbolo de predicado* R de n lugares de $\mathcal{L}$ (distinto de $=$), uma relação de n lugares $R^{\mathfrak{M}} \subseteq |\mathfrak{M}|^n$
4. *Interpretação dos símbolos de função*: para cada *símbolo de função* f de n lugares de $\mathcal{L}$, uma função de n lugares $f^{\mathfrak{M}}: |\mathfrak{M}|^n \rightarrow |\mathfrak{M}|$

Exemplo syn.2. A *estrutura* $\mathfrak{M}$ para a linguagem da aritmética consiste em um conjunto, um elemento de $|\mathfrak{M}|$, $o^{\mathfrak{M}}$, como interpretação do *símbolo de constante* o , uma função de um lugar $r^{\mathfrak{M}}: |\mathfrak{M}| \rightarrow |\mathfrak{M}|$, duas funções de dois lugares $+^{\mathfrak{M}}$ e $\times^{\mathfrak{M}}$, ambas $|\mathfrak{M}|^2 \rightarrow |\mathfrak{M}|$, e uma relação de dois lugares $<^{\mathfrak{M}} \subseteq |\mathfrak{M}|^2$.

Um exemplo óbvio de tal estrutura é o seguinte:

1. $|\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$
2. $o^{\mathfrak{M}} = 0$
3. $r^{\mathfrak{M}}(n) = n + 1$ para todos $n \in \mathbb{N}$
4. $+^{\mathfrak{M}}(n, m) = n + m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$
5. $\times^{\mathfrak{M}}(n, m) = n \cdot m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$
6. $<^{\mathfrak{M}} = \{ \langle n, m \rangle : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n < m \}$

A estrutura $\mathfrak{N}$ para $\mathcal{L}_A$ assim definida é chamada de *modelo padrão da aritmética*, porque interpreta as constantes não lógicas de $\mathcal{L}_A$ exatamente como se esperaria.

No entanto, há muitas outras estruturas possíveis para $\mathcal{L}_A$. Por exemplo, poderíamos tomar como domínio o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros em vez de $\mathbb{N}$, e definir as interpretações de $0, 1, +, \times, <$ adequadamente. Mas também podemos definir estruturas para $\mathcal{L}_A$ que não têm nada, nem mesmo remotamente, a ver com números.

Exemplo syn.3. Uma estrutura $\mathfrak{M}$ para a linguagem $\mathcal{L}_Z$ da teoria dos conjuntos requer apenas um conjunto e uma única relação de dois lugares. Então, tecnicamente, por exemplo, o conjunto das pessoas mais a relação “ x é mais velho que y ” poderia ser usado como a estrutura para $\mathcal{L}_Z$, assim como $\mathbb{N}$ junto com $n \geq m$ para $n, m \in \mathbb{N}$.

Uma estrutura particularmente interessante para $\mathcal{L}_Z$ na qual os membros do domínio são de fato conjuntos, e a interpretação de $\in$ é de fato a relação “ x é um membro de y ” é a estrutura $\mathfrak{H}\mathfrak{F}$ dos conjuntos hereditariamente finitos:

1. $|\mathfrak{H}\mathfrak{F}| = \emptyset \cup \wp(\emptyset) \cup \wp(\wp(\emptyset)) \cup \wp(\wp(\wp(\emptyset))) \cup \dots$;
2. $\in^{\mathfrak{H}\mathfrak{F}} = \{\langle x, y \rangle : x, y \in |\mathfrak{H}\mathfrak{F}|, x \in y\}$.

As estipulações que fazemos sobre o que conta como a estrutura impactam nossa lógica. Por exemplo, a escolha de impedir domínios vazios garante, dada a explicação usual de satisfação (ou verdade) para sentenças quantificadas, que $\exists x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$ é válida—isto é, uma verdade lógica. E a estipulação de que todos os símbolos de constante devem referir-se a um objeto no domínio garante que a generalização existencial é um padrão de inferência correto: $\varphi(a)$, portanto $\exists x \varphi(x)$. Se permitíssemos que nomes se referissem a algo fora do domínio, ou que não se referissem, então estaríamos a caminho de uma lógica livre, na qual a generalização existencial requer uma premissa adicional: $\varphi(a)$ e $\exists x x = a$, portanto $\exists x \varphi(x)$.

syn.3 Estruturas Cobertas para Linguagens de Primeira Ordem

fol:syn:cov:
sec

Lembre-se de que um termo é *fechado* se não contém variáveis.

explanation

Definição syn.4 (Valor de termos fechados). Se t é um termo fechado da linguagem $\mathcal{L}$ e $\mathfrak{M}$ é a estrutura para $\mathcal{L}$, o valor $\text{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$ é definido como segue:

1. Se t é apenas o símbolo de constante c , então $\text{Val}^{\mathfrak{M}}(c) = c^{\mathfrak{M}}$.
2. Se t é da forma $f(t_1, \dots, t_n)$, então

$$\text{Val}^{\mathfrak{M}}(t) = f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_n)).$$

Definição syn.5 (Estrutura Coberta). A estrutura é coberta se todo elemento do domínio é o valor de algum termo fechado.

Exemplo syn.6. Seja $\mathcal{L}$ a linguagem com os símbolos de constante *zero*, *um*, *dois*, ..., o símbolo de predicado binário $<$, e os símbolos de função binários $+$ e $\times$. Então a estrutura $\mathfrak{M}$ para $\mathcal{L}$ é aquela com domínio $|\mathfrak{M}| = \{0, 1, 2, \dots\}$ e atribuições $zero^{\mathfrak{M}} = 0$, $um^{\mathfrak{M}} = 1$, $dois^{\mathfrak{M}} = 2$, e assim por diante. Para o símbolo de relação binário $<$, o conjunto $<^{\mathfrak{M}}$ é o conjunto de todos os pares $\langle c_1, c_2 \rangle \in |\mathfrak{M}|^2$ tais que c_1 é menor que c_2 : por exemplo, $\langle 1, 3 \rangle \in <^{\mathfrak{M}}$ mas $\langle 2, 2 \rangle \notin <^{\mathfrak{M}}$. Para o símbolo de função binário $+$, defina $+^{\mathfrak{M}}$ da maneira usual—por exemplo, $+^{\mathfrak{M}}(2, 3)$ resulta em 5, e analogamente para o símbolo de função binário $\times$. Portanto, o valor de *quatro* é apenas 4, e o valor de $\times(dois, +(tres, zero))$ (ou em notação infixa, $dois \times (tres + zero)$) é

$$\begin{aligned} \text{Val}^{\mathfrak{M}}(\times(dois, +(tres, zero))) &= \\ &= \times^{\mathfrak{M}}(\text{Val}^{\mathfrak{M}}(dois), \text{Val}^{\mathfrak{M}}(+(tres, zero))) \\ &= \times^{\mathfrak{M}}(\text{Val}^{\mathfrak{M}}(dois), +^{\mathfrak{M}}(\text{Val}^{\mathfrak{M}}(tres), \text{Val}^{\mathfrak{M}}(zero))) \\ &= \times^{\mathfrak{M}}(dois^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}(tres^{\mathfrak{M}}, zero^{\mathfrak{M}})) \\ &= \times^{\mathfrak{M}}(2, +^{\mathfrak{M}}(3, 0)) \\ &= \times^{\mathfrak{M}}(2, 3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Problema syn.1. $\mathfrak{N}$, o modelo padrão da aritmética, é coberto? Explique.

syn.4 Satisfação de a Fórmula em a Estrutura

explanation A noção básica que relaciona expressões como termos e fórmulas, por um lado, e estruturas, por outro, são as de *valor* de um termo e *satisfação* de a fórmula. Informalmente, o valor de um termo é um membro de a estrutura—se o termo é apenas uma constante, seu valor é o objeto atribuído à constante pela estrutura, e se ele é construído usando símbolos de função, o valor é calculado a partir dos valores das constantes e das funções atribuídas às funções no termo. A fórmula é satisfeita em a estrutura se a interpretação dada aos predicados torna a fórmula verdadeira no domínio da estrutura. Essa noção de satisfação é especificada indutivamente: a especificação da estrutura afirma diretamente quando fórmulas atômicas são satisfeitas, e definimos quando uma fórmula complexa é satisfeita dependendo do conectivo principal ou quantificador e de se as subfórmulas imediatas são ou não satisfeitas. fol:syn:sat:sec

O caso dos quantificadores aqui é um pouco delicado, pois a subfórmula imediata de uma fórmula quantificada tem uma variável livre, e estruturas não especificam os valores das variáveis. Para lidar com essa dificuldade, também introduzimos *atribuições de variáveis* e definimos a satisfação não em relação a a estrutura sozinha, mas em relação a a estrutura mais uma atribuição de variáveis.

Definição syn.7 (Atribuição de Variáveis). Uma *atribuição de variáveis* s para a *estrutura* $\mathfrak{M}$ é uma função que mapeia cada *variável* para um *membro* de $|\mathfrak{M}|$, isto é, $s: \text{Var} \rightarrow |\mathfrak{M}|$.

A *estrutura* atribui a *valor* a cada *símbolo de constante*, e uma atribuição de variáveis a cada variável. Mas queremos usar termos construídos a partir deles para também nomear *membros do domínio*. Para isso, definimos o *valor* dos termos indutivamente. Para *símbolos de constante* e variáveis, o valor é exatamente como a *estrutura* ou a atribuição de variáveis o especifica; para termos mais complexos, ele é calculado recursivamente usando as funções que a *estrutura* atribui aos *símbolos de função*. explanation

Definição syn.8 (Valor de Termos). Se t é um termo da linguagem $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M}$ é a *estrutura* para $\mathcal{L}$, e s é uma atribuição de variáveis para $\mathfrak{M}$, o *valor* $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t)$ é definido como segue:

1. $t \equiv c$: $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t) = c^{\mathfrak{M}}$.
2. $t \equiv x$: $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t) = s(x)$.
3. $t \equiv f(t_1, \dots, t_n)$:

$$\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t) = f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_n)).$$

Definição syn.9 (x -Variante). Se s é uma atribuição de variáveis para a *estrutura* $\mathfrak{M}$, então qualquer atribuição de variáveis s' para $\mathfrak{M}$ que difere de s no máximo no que atribui a x é chamada de x -variante de s . Se s' é uma x -variante de s escrevemos $s' \sim_x s$.

Note que uma x -variante de uma atribuição s não *precisa* atribuir algo diferente a x . De fato, toda atribuição conta como uma x -variante de si mesma. explanation

Definição syn.10. Se s é uma atribuição de variáveis para a *estrutura* $\mathfrak{M}$ e $m \in |\mathfrak{M}|$, então a atribuição $s[m/x]$ é a atribuição de variáveis definida por

$$s[m/x](y) = \begin{cases} m & \text{se } y \equiv x \\ s(y) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em outras palavras, $s[m/x]$ é a x -variante particular de s que atribui o *membro* m do domínio a x , e atribui as mesmas coisas às *variáveis* diferentes de x que s atribui.

fol:syn:sat:
defn:satisfaction

Definição syn.11 (Satisfação). A satisfação de a *fórmula* φ em a *estrutura* $\mathfrak{M}$ relativamente a uma atribuição de variáveis s , em símbolos: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$, é definida recursivamente como segue. (Escrevemos $\mathfrak{M}, s \not\models \varphi$ para significar “não $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ ”.)

1. $\varphi \equiv \perp$: $\mathfrak{M}, s \not\models \varphi$.

2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$.
3. $\varphi \equiv R(t_1, \dots, t_n)$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\langle \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_n) \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$.
4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1) = \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_2)$.
5. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s \not\models \psi$.
6. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s \models \psi$ e $\mathfrak{M}, s \models \chi$.
7. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s \models \psi$ ou $\mathfrak{M}, s \models \chi$ (ou ambos).
8. $\varphi \equiv (\psi \rightarrow \chi)$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s \not\models \psi$ ou $\mathfrak{M}, s \models \chi$ (ou ambos).
9. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse ou ambos $\mathfrak{M}, s \models \psi$ e $\mathfrak{M}, s \models \chi$, ou nem $\mathfrak{M}, s \models \psi$ nem $\mathfrak{M}, s \models \chi$.
10. $\varphi \equiv \forall x \psi$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse para todo **membro** $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}, s[m/x] \models \psi$.
11. $\varphi \equiv \exists x \psi$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse para pelo menos um **membro** $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}, s[m/x] \models \psi$.

explanation

As atribuições de variáveis são importantes nas últimas duas cláusulas. Não podemos definir a satisfação de $\forall x \psi(x)$ por “para todo $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M} \models \psi(m)$ ”. Não podemos definir a satisfação de $\exists x \psi(x)$ por “para pelo menos um $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M} \models \psi(m)$ ”. A razão é que, se $m \in |\mathfrak{M}|$, ele não é um símbolo da linguagem, e portanto $\psi(m)$ não é **a fórmula** (isto é, $\psi[m/x]$ é indefinido). Também não podemos supor que temos **símbolos de constante** ou termos disponíveis que nomeiem cada **membro** de $\mathfrak{M}$, já que não há nada na definição de **estruturas** que o exija. Na linguagem padrão, o conjunto de **símbolos de constante** é **infinito enumerável**, então se $|\mathfrak{M}|$ não é **enumerável** não há sequer **símbolos de constante** suficientes para nomear cada objeto.

Resolvemos esse problema introduzindo atribuições de variáveis, que nos permitem ligar variáveis diretamente a **membros** do domínio. Então, em vez de dizer que, por exemplo, $\exists x \psi(x)$ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ sse para pelo menos um $m \in |\mathfrak{M}|$, dizemos que ela é satisfeita em $\mathfrak{M}$ *relativamente a* s sse $\psi(x)$ é satisfeita relativamente a $s[m/x]$ para pelo menos um $m \in |\mathfrak{M}|$.

Exemplo syn.12. Seja $\mathcal{L} = \{a, b, f, R\}$ onde a e b são **símbolos de constante**, f é um **símbolo de função** de dois lugares, e R é um **símbolo de predicado** de dois lugares. Considere a **estrutura** $\mathfrak{M}$ definida por:

1. $|\mathfrak{M}| = \{1, 2, 3, 4\}$
2. $a^{\mathfrak{M}} = 1$
3. $b^{\mathfrak{M}} = 2$
4. $f^{\mathfrak{M}}(x, y) = x + y$ se $x + y \leq 3$ e $= 3$ caso contrário.
5. $R^{\mathfrak{M}} = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}$

A função $s(x) = 1$ que atribui $1 \in |\mathfrak{M}|$ a cada **variável** é uma atribuição de variáveis para $\mathfrak{M}$.

Então

$$\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(a, b)) = f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(a), \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(b)).$$

Como a e b são **símbolos de constante**, $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(a) = a^{\mathfrak{M}} = 1$ e $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(b) = b^{\mathfrak{M}} = 2$.
Então

$$\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(a, b)) = f^{\mathfrak{M}}(1, 2) = 1 + 2 = 3.$$

Para calcular o valor de $f(f(a, b), a)$ temos que considerar

$$\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(f(a, b), a)) = f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(a, b)), \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(a)) = f^{\mathfrak{M}}(3, 1) = 3,$$

já que $3 + 1 > 3$. Como $s(x) = 1$ e $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(x) = s(x)$, também temos

$$\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(f(a, b), x)) = f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(a, b)), \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(x)) = f^{\mathfrak{M}}(3, 1) = 3,$$

Uma **fórmula** atômica $R(t_1, t_2)$ é satisfeita se a tupla de valores de seus argumentos, isto é, $\langle \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1), \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_2) \rangle$, é **um membro** de $R^{\mathfrak{M}}$. Assim, por exemplo, temos $\mathfrak{M}, s \models R(b, f(a, b))$ já que $\langle \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(b), \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(a, b)) \rangle = \langle 2, 3 \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$, mas $\mathfrak{M}, s \not\models R(x, f(a, b))$ já que $\langle 1, 3 \rangle \notin R^{\mathfrak{M}}[s]$.

Para determinar se uma fórmula não atômica φ é satisfeita, aplicam-se as cláusulas da definição indutiva que se aplicam ao conectivo principal. Por exemplo, o conectivo principal em $R(a, a) \rightarrow (R(b, x) \vee R(x, b))$ é o $\rightarrow$, e

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, s \models R(a, a) \rightarrow (R(b, x) \vee R(x, b)) \text{ sse} \\ \mathfrak{M}, s \not\models R(a, a) \text{ ou } \mathfrak{M}, s \models R(b, x) \vee R(x, b) \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{M}, s \models R(a, a)$ (porque $\langle 1, 1 \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$) ainda não podemos determinar a resposta e devemos primeiro descobrir se $\mathfrak{M}, s \models R(b, x) \vee R(x, b)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, s \models R(b, x) \vee R(x, b) \text{ sse} \\ \mathfrak{M}, s \models R(b, x) \text{ ou } \mathfrak{M}, s \models R(x, b) \end{aligned}$$

E este é o caso, já que $\mathfrak{M}, s \models R(x, b)$ (porque $\langle 1, 2 \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$).

Lembre-se de que uma x -variante de s é uma atribuição de variáveis que difere de s no máximo no que atribui a x . Para cada **membro** de $|\mathfrak{M}|$, há uma x -variante de s :

$$\begin{aligned} s_1 = s[1/x], & \quad s_2 = s[2/x], \\ s_3 = s[3/x], & \quad s_4 = s[4/x]. \end{aligned}$$

Assim, por exemplo, $s_2(x) = 2$ e $s_2(y) = s(y) = 1$ para todas as variáveis y diferentes de x . Estas são todas as x -variantes de s para a estrutura $\mathfrak{M}$, já que $|\mathfrak{M}| = \{1, 2, 3, 4\}$. Note, em particular, que $s_1 = s$ (s é sempre uma x -variante de si mesma).

Para determinar se uma fórmula quantificada existencialmente $\exists x \varphi(x)$ é satisfeita, temos que determinar se $\mathfrak{M}, s[m/x] \models \varphi(x)$ para pelo menos um $m \in |\mathfrak{M}|$. Assim,

$$\mathfrak{M}, s \models \exists x (R(b, x) \vee R(x, b)),$$

já que $\mathfrak{M}, s[1/x] \models R(b, x) \vee R(x, b)$ ($s[3/x]$ também serviria). Mas,

$$\mathfrak{M}, s \not\models \exists x (R(b, x) \wedge R(x, b))$$

já que, qualquer que seja o $m \in |\mathfrak{M}|$ que escolhamos, $\mathfrak{M}, s[m/x] \not\models R(b, x) \wedge R(x, b)$.

Para determinar se uma fórmula quantificada universalmente $\forall x \varphi(x)$ é satisfeita, temos que determinar se $\mathfrak{M}, s[m/x] \models \varphi(x)$ para todo $m \in |\mathfrak{M}|$. Assim,

$$\mathfrak{M}, s \models \forall x (R(x, a) \rightarrow R(a, x)),$$

já que $\mathfrak{M}, s[m/x] \models R(x, a) \rightarrow R(a, x)$ para todo $m \in |\mathfrak{M}|$. Para $m = 1$, temos $\mathfrak{M}, s[1/x] \models R(a, x)$ então o consequente é verdadeiro; para $m = 2, 3$, e 4 , temos $\mathfrak{M}, s[m/x] \not\models R(x, a)$, então o antecedente é falso. Mas,

$$\mathfrak{M}, s \not\models \forall x (R(a, x) \rightarrow R(x, a))$$

já que $\mathfrak{M}, s[2/x] \not\models R(a, x) \rightarrow R(x, a)$ (porque $\mathfrak{M}, s[2/x] \models R(a, x)$ e $\mathfrak{M}, s[2/x] \not\models R(x, a)$).

Para um caso mais complicado, considere

$$\forall x (R(a, x) \rightarrow \exists y R(x, y)).$$

Como $\mathfrak{M}, s[3/x] \not\models R(a, x)$ e $\mathfrak{M}, s[4/x] \not\models R(a, x)$, os casos interessantes em que temos que nos preocupar com o consequente do condicional são apenas $m = 1$ e $m = 2$. $\mathfrak{M}, s[1/x] \models \exists y R(x, y)$ vale? Vale se há pelo menos um $n \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}, s[1/x][n/y] \models R(x, y)$. De fato, se tomarmos $n = 1$, temos $s[1/x][n/y] = s[1/y] = s$. Como $s(x) = 1$, $s(y) = 1$, e $\langle 1, 1 \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$, a resposta é sim.

Para determinar se $\mathfrak{M}, s[2/x] \models \exists y R(x, y)$, temos que olhar para as atribuições de variáveis $s[2/x][n/y]$. Aqui, para $n = 1$, essa atribuição é $s_2 = s[2/x]$, que não satisfaz $R(x, y)$ ($s_2(x) = 2$, $s_2(y) = 1$, e $\langle 2, 1 \rangle \notin R^{\mathfrak{M}}$). No entanto, considere $s[2/x][3/y] = s_2[3/y]$. $\mathfrak{M}, s_2[3/y] \models R(x, y)$ já que $\langle 2, 3 \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$, e assim $\mathfrak{M}, s_2 \models \exists y R(x, y)$.

Assim, para todo $n \in |\mathfrak{M}|$, ou $\mathfrak{M}, s[m/x] \not\models R(a, x)$ (se $m = 3, 4$) ou $\mathfrak{M}, s[m/x] \models \exists y R(x, y)$ (se $m = 1, 2$), e assim

$$\mathfrak{M}, s \models \forall x (R(a, x) \rightarrow \exists y R(x, y)).$$

Por outro lado,

$$\mathfrak{M}, s \not\models \exists x (R(a, x) \wedge \forall y R(x, y)).$$

Temos $\mathfrak{M}, s[m/x] \models R(a, x)$ apenas para $m = 1$ e $m = 2$. Mas para ambos esses valores de m , há por sua vez um $n \in |\mathfrak{M}|$, a saber $n = 4$, tal que $\mathfrak{M}, s[m/x][n/y] \not\models R(x, y)$ e assim $\mathfrak{M}, s[m/x] \not\models \forall y R(x, y)$ para $m = 1$ e $m = 2$. Em suma, não há $m \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}, s[m/x] \models R(a, x) \wedge \forall y R(x, y)$.

Problema syn.2. Seja $\mathcal{L} = \{c, f, A\}$ com um **símbolo de constante**, um **símbolo de função** de um lugar e um **símbolo de predicado** de dois lugares, e seja a **estrutura** $\mathfrak{M}$ dada por

1. $|\mathfrak{M}| = \{1, 2, 3\}$
2. $c^{\mathfrak{M}} = 3$
3. $f^{\mathfrak{M}}(1) = 2, f^{\mathfrak{M}}(2) = 3, f^{\mathfrak{M}}(3) = 2$
4. $A^{\mathfrak{M}} = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$

(a) Seja $s(v) = 1$ para todas as **variáveis** v . Descubra se

$$\mathfrak{M}, s \models \exists x (A(f(z), c) \rightarrow \forall y (A(y, x) \vee A(f(y), x)))$$

Explique por que sim ou por que não.

(b) Dê uma estrutura e uma atribuição de variáveis diferentes nas quais a **fórmula** não seja satisfeita.

syn.5 Atribuições de Variáveis

fol:syn:ass: sec Uma atribuição de variáveis s fornece um valor para *toda* variável—e há infinitas delas. Isso, é claro, não é necessário. Exigimos que as atribuições de variáveis atribuam valores a todas as **variáveis** simplesmente porque isso torna as coisas muito mais fáceis. O valor de um termo t , e se a **fórmula** φ é satisfeita em a **estrutura** com respeito a s , dependem apenas das atribuições que s faz às **variáveis** em t e às **variáveis** livres de φ . Esse é o conteúdo das próximas duas proposições. Para tornar precisa a ideia de “depende de”, mostramos que quaisquer duas atribuições de variáveis que concordam em todas as variáveis em t dão o mesmo valor, e que φ é satisfeita relativamente a uma sse é satisfeita relativamente à outra se duas atribuições de variáveis concordam em todas as variáveis livres de φ . explanation

fol:syn:ass: prop:valindep **Proposição syn.13.** Se as **variáveis** em um termo t estão entre $x_1, \dots, x_n$, e $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ para $i = 1, \dots, n$, então $\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t) = \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t)$.

Prova. Por indução sobre a complexidade de t . Para o caso base, t pode ser a **símbolo de constante** ou uma das variáveis $x_1, \dots, x_n$. Se $t = c$, então $\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t) = c^{\mathfrak{M}} = \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t)$. Se $t = x_i$, $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ pela hipótese da proposição, e assim $\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t) = s_1(x_i) = s_2(x_i) = \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t)$.

Para o passo indutivo, suponha que $t = f(t_1, \dots, t_k)$ e que a afirmação vale para $t_1, \dots, t_k$. Então

$$\begin{aligned}\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t) &= \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(f(t_1, \dots, t_k)) \\ &= f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_k)).\end{aligned}$$

Para $j = 1, \dots, k$, as **variáveis** de t_j estão entre $x_1, \dots, x_n$. Pela hipótese de indução, $\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_j) = \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_j)$. Assim,

$$\begin{aligned}\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t) &= \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(f(t_1, \dots, t_k)) \\ &= f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_k)) \\ &= f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_k)) \\ &= \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(f(t_1, \dots, t_k)) = \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t). \quad \square\end{aligned}$$

Proposição syn.14. *Se as **variáveis** livres em φ estão entre $x_1, \dots, x_n$, e $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ para $i = 1, \dots, n$, então $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.* fol:syn:ass: prop:satind

Prova. Usamos indução sobre a complexidade de φ . Para o caso base, onde φ é atômica, φ pode ser: $\top, \perp, R(t_1, \dots, t_k)$ para um predicado R de k lugares e termos $t_1, \dots, t_k$, ou $t_1 = t_2$ para termos t_1 e t_2 . Nos dois últimos casos, demonstramos apenas a direção direta do **bicondicional**, já que a prova da recíproca é simétrica.

1. $\varphi \equiv \top$: tanto $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$ quanto $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.
2. $\varphi \equiv \perp$: tanto $\mathfrak{M}, s_1 \not\models \varphi$ quanto $\mathfrak{M}, s_2 \not\models \varphi$.
3. $\varphi \equiv R(t_1, \dots, t_k)$: seja $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$. Então

$$\langle \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_k) \rangle \in R^{\mathfrak{M}}.$$

Para $i = 1, \dots, k$, $\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_i) = \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_i)$ por **Proposição syn.13**. Então também temos $\langle \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_k) \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$, e portanto $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.

4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$: suponha $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$. Então $\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_1) = \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_2)$. Assim,

$$\begin{aligned}\text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_1) &= \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_1) && \text{(por Proposição syn.13)} \\ &= \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_2) && \text{(já que } \mathfrak{M}, s_1 \models t_1 = t_2 \text{)} \\ &= \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_2) && \text{(por Proposição syn.13),}\end{aligned}$$

então $\mathfrak{M}, s_2 \models t_1 = t_2$.

Agora suponha $\mathfrak{M}, s_1 \models \psi$ sse $\mathfrak{M}, s_2 \models \psi$ para todas as fórmulas ψ menos complexas que φ . O passo de indução procede por casos determinados pelo operador principal de φ . Em cada caso, demonstramos apenas a direção direta do **bicondicional**; a prova da direção reversa é simétrica. Em todos os casos exceto os dos quantificadores, aplicamos a hipótese de indução às sub-fórmulas ψ de φ . As variáveis livres de ψ estão entre as de φ . Assim, se s_1 e s_2 concordam nas variáveis livres de φ , elas também concordam nas de ψ , e a hipótese de indução se aplica a ψ .

1. $\varphi \equiv \neg\psi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$, então $\mathfrak{M}, s_1 \not\models \psi$, então pela hipótese de indução, $\mathfrak{M}, s_2 \not\models \psi$, portanto $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.
2. $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$, então $\mathfrak{M}, s_1 \models \psi$ e $\mathfrak{M}, s_1 \models \chi$, então pela hipótese de indução, $\mathfrak{M}, s_2 \models \psi$ e $\mathfrak{M}, s_2 \models \chi$. Portanto, $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.
3. $\varphi \equiv \psi \vee \chi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$, então $\mathfrak{M}, s_1 \models \psi$ ou $\mathfrak{M}, s_1 \models \chi$. Pela hipótese de indução, $\mathfrak{M}, s_2 \models \psi$ ou $\mathfrak{M}, s_2 \models \chi$, então $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.
4. $\varphi \equiv \psi \rightarrow \chi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$, então $\mathfrak{M}, s_1 \not\models \psi$ ou $\mathfrak{M}, s_1 \models \chi$. Pela hipótese de indução, $\mathfrak{M}, s_2 \not\models \psi$ ou $\mathfrak{M}, s_2 \models \chi$, então $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.
5. $\varphi \equiv \psi \leftrightarrow \chi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$, então ou $\mathfrak{M}, s_1 \models \psi$ e $\mathfrak{M}, s_1 \models \chi$, ou $\mathfrak{M}, s_1 \not\models \psi$ e $\mathfrak{M}, s_1 \not\models \chi$. Pela hipótese de indução, ou $\mathfrak{M}, s_2 \models \psi$ e $\mathfrak{M}, s_2 \models \chi$ ou $\mathfrak{M}, s_2 \not\models \psi$ e $\mathfrak{M}, s_2 \not\models \chi$. Em qualquer caso, $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.
6. $\varphi \equiv \exists x \psi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$, há um $m \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}, s_1[m/x] \models \psi$. Sejam $s'_1 = s_1[m/x]$ e $s'_2 = s_2[m/x]$. As variáveis livres de ψ estão entre $x_1, \dots, x_n$, e x . $s'_1(x_i) = s'_2(x_i)$, já que s'_1 e s'_2 são x -variantes de s_1 e s_2 , respectivamente, e por hipótese $s_1(x_i) = s_2(x_i)$. $s'_1(x) = s'_2(x) = m$ pela forma como definimos s'_1 e s'_2 . Então a hipótese de indução se aplica a ψ e s'_1, s'_2 , então $\mathfrak{M}, s'_2 \models \psi$. Portanto, já que $s'_2 = s_2[m/x]$, há um $m \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}, s_2[m/x] \models \psi$, e assim $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.
7. $\varphi \equiv \forall x \psi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$, então para todo $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}, s_1[m/x] \models \psi$. Queremos mostrar que também, para todo $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}, s_2[m/x] \models \psi$. Então seja $m \in |\mathfrak{M}|$ arbitrário, e considere $s'_1 = s_1[m/x]$ e $s'_2 = s_2[m/x]$. Temos que $\mathfrak{M}, s'_1 \models \psi$. As variáveis livres de ψ estão entre $x_1, \dots, x_n$, e x . $s'_1(x_i) = s'_2(x_i)$, já que s'_1 e s'_2 são x -variantes de s_1 e s_2 , respectivamente, e por hipótese $s_1(x_i) = s_2(x_i)$. $s'_1(x) = s'_2(x) = m$ pela forma como definimos s'_1 e s'_2 . Então a hipótese de indução se aplica a ψ e s'_1, s'_2 , e temos $\mathfrak{M}, s'_2 \models \psi$. Isso se aplica a todo $m \in |\mathfrak{M}|$, isto é, $\mathfrak{M}, s_2[m/x] \models \psi$ para todo $m \in |\mathfrak{M}|$, então $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.

Por indução, obtemos que $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$ sempre que as variáveis livres em φ estão entre $x_1, \dots, x_n$ e $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ para $i = 1, \dots, n$. $\square$

Problema syn.3. Complete a prova de **Proposição syn.14**.

explanation

Sentenças não têm variáveis livres, então quaisquer duas atribuições de variáveis atribuem as mesmas coisas a todas as (zero) variáveis livres de qualquer sentença. A proposição que acabamos de provar significa, então, que se **a sentença** é satisfeita ou não em uma estrutura relativamente a uma atribuição de variáveis é completamente independente da atribuição. Registraremos esse fato. Ele justifica a definição de satisfação de **a sentença** em **a estrutura** (sem mencionar uma atribuição de variáveis) que segue.

Corolário syn.15. Se φ é **a sentença** e s uma atribuição de variáveis, então $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s' \models \varphi$ para toda atribuição de variáveis s' .

fol:syn:ass:
cor:sat-sentence

Prova. Seja s' uma atribuição de variáveis qualquer. Como φ é **a sentença**, ela não tem variáveis livres, e assim toda atribuição de variáveis s' trivialmente atribui as mesmas coisas a todas as variáveis livres de φ que faz s . Então a condição de **Proposição syn.14** é satisfeita, e temos $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s' \models \varphi$. $\square$

Definição syn.16. Se φ é **a sentença**, dizemos que **a estrutura** $\mathfrak{M}$ *satisfaz* φ , $\mathfrak{M} \models \varphi$, sse $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ para todas as atribuições de variáveis s .

fol:syn:ass:
defn:satisfaction

Se $\mathfrak{M} \models \varphi$, também dizemos simplesmente que φ é *verdadeira em* $\mathfrak{M}$. A noção de satisfação se estende naturalmente de **sentenças** individuais para conjuntos de **sentenças**.

Definição syn.17. Se Γ é um conjunto de **sentenças** Γ , dizemos que **a estrutura** $\mathfrak{M}$ *satisfaz* Γ , $\mathfrak{M} \models \Gamma$, sse $\mathfrak{M} \models \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$.

fol:syn:ass:
defn:sat

Proposição syn.18. Seja $\mathfrak{M}$ **a estrutura**, φ **a sentença**, e s uma atribuição de variáveis. $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s \models \varphi$.

fol:syn:ass:
prop:sentence-sat-true

Prova. Exercício. $\square$

Problema syn.4. Prove **Proposição syn.18**

Proposição syn.19. Suponha que $\varphi(x)$ contém apenas x livre, e $\mathfrak{M}$ é **a estrutura**. Então:

fol:syn:ass:
prop:sat-quant

1. $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x)$ sse $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$ para pelo menos uma atribuição de variáveis s .
2. $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$ sse $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$ para todas as atribuições de variáveis s .

Prova. Exercício. $\square$

Problema syn.5. Prove **Proposição syn.19**.

Problema syn.6. Suponha que $\mathcal{L}$ é uma linguagem sem **símbolos de função**. Dada uma **estrutura** $\mathfrak{M}$, c **a símbolo de constante** e $a \in |\mathfrak{M}|$, defina $\mathfrak{M}[a/c]$ como a **estrutura** que é exatamente como $\mathfrak{M}$, exceto que $c^{\mathfrak{M}[a/c]} = a$. Defina $\mathfrak{M} \models \varphi$ para **sentenças** φ por:

1. $\varphi \equiv \perp$: não $\mathfrak{M} \models \varphi$.
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M} \models \varphi$.
3. $\varphi \equiv R(d_1, \dots, d_n)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse $\langle d_1^{\mathfrak{M}}, \dots, d_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$.
4. $\varphi \equiv d_1 = d_2$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse $d_1^{\mathfrak{M}} = d_2^{\mathfrak{M}}$.
5. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse não $\mathfrak{M} \models \psi$.
6. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse $\mathfrak{M} \models \psi$ e $\mathfrak{M} \models \chi$.
7. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse $\mathfrak{M} \models \psi$ ou $\mathfrak{M} \models \chi$ (ou ambos).
8. $\varphi \equiv (\psi \rightarrow \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse não $\mathfrak{M} \models \psi$ ou $\mathfrak{M} \models \chi$ (ou ambos).
9. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse ou ambos $\mathfrak{M} \models \psi$ e $\mathfrak{M} \models \chi$, ou nem $\mathfrak{M} \models \psi$ nem $\mathfrak{M} \models \chi$.
10. $\varphi \equiv \forall x \psi$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse para todo $a \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}[a/c] \models \psi[c/x]$, se c não ocorre em ψ .
11. $\varphi \equiv \exists x \psi$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse há um $a \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}[a/c] \models \psi[c/x]$, se c não ocorre em ψ .

Sejam $x_1, \dots, x_n$ todas as **variáveis** livres em φ , $c_1, \dots, c_n$ símbolos de constante não presentes em φ , $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{M}|$, e $s(x_i) = a_i$.

Mostre que $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}[a_1/c_1, \dots, a_n/c_n] \models \varphi[c_1/x_1] \dots [c_n/x_n]$.

(Este problema mostra que é possível dar uma semântica para a lógica de primeira ordem que dispensa atribuições de variáveis.)

Problema syn.7. Suponha que f é um símbolo de função não presente em $\varphi(x, y)$. Mostre que há **a estrutura** $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models \forall x \exists y \varphi(x, y)$ sse há uma $\mathfrak{M}'$ tal que $\mathfrak{M}' \models \forall x \varphi(x, f(x))$.

(Este problema é um caso especial do que é conhecido como Teorema de Skolem; $\forall x \varphi(x, f(x))$ é chamado de *forma normal de Skolem* de $\forall x \exists y \varphi(x, y)$.)

syn.6 Extensionalidade

fol:syn:ext:
sec

A extensionalidade, às vezes chamada de relevância, pode ser expressa informalmente da seguinte forma: os únicos fatores que influenciam a satisfação de **fórmula** φ em **a estrutura** $\mathfrak{M}$ em relação a uma atribuição de variáveis s são o tamanho do **domínio** e as atribuições feitas por $\mathfrak{M}$ e s aos elementos da linguagem que de fato aparecem em φ .

explanation

Uma consequência imediata da extensionalidade é que, quando duas **estruturas** $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$ concordam em todos os elementos da linguagem que aparecem em uma sentença φ e têm o mesmo domínio, $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$ também devem concordar quanto a se φ em si é verdadeira ou não.

Proposição syn.20 (Extensionalidade). *Seja φ a fórmula, e $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ estruturas com $|\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}_2|$, e s uma atribuição de variáveis sobre $|\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}_2|$. Se $c^{\mathfrak{M}_1} = c^{\mathfrak{M}_2}$, $R^{\mathfrak{M}_1} = R^{\mathfrak{M}_2}$, e $f^{\mathfrak{M}_1} = f^{\mathfrak{M}_2}$ para todo símbolo de constante c , símbolo de relação R , e símbolo de função f que ocorre em φ , então $\mathfrak{M}_1, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}_2, s \models \varphi$.* fol:syn:ext: prop:extensionality

Prova. Primeiro prove (por indução sobre t) que, para todo termo, $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}_1}(t) = \text{Val}_s^{\mathfrak{M}_2}(t)$. Então prove a proposição por indução sobre φ , fazendo uso da afirmação que acabamos de provar para a base da indução (onde φ é atômica).□

Problema syn.8. Faça a prova de **Proposição syn.20** em detalhe.

Corolário syn.21 (Extensionalidade para Sentenças). *Seja φ a sentença e $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ como em **Proposição syn.20**. Então $\mathfrak{M}_1 \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}_2 \models \varphi$.* fol:syn:ext: cor:extensionality-sent

Prova. Segue de **Proposição syn.20** por **Corolário syn.15**. □

Além disso, o valor de um termo, e se a estrutura satisfaz ou não a fórmula, dependem apenas dos valores de seus subtermos.

Proposição syn.22. *Seja $\mathfrak{M}$ a estrutura, t e t' termos, e s uma atribuição de variáveis. Então $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t[t'/x]) = \text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(t)$.* fol:syn:ext: prop:ext-terms

Prova. Por indução sobre t .

1. Se t é uma constante, digamos, $t \equiv c$, então $t[t'/x] = c$, e $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(c) = c^{\mathfrak{M}} = \text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(c)$.
2. Se t é uma variável diferente de x , digamos, $t \equiv y$, então $t[t'/x] = y$, e $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(y) = \text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(y)$ já que $s \sim_x s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]$.
3. Se $t \equiv x$, então $t[t'/x] = t'$. Mas $\text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(x) = \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')$ pela definição de $s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]$.
4. Se $t \equiv f(t_1, \dots, t_n)$ então temos:

$$\begin{aligned}
\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t[t'/x]) &= \\
&= \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(t_1[t'/x], \dots, t_n[t'/x])) \\
&\quad \text{pela definição de } t[t'/x] \\
&= f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1[t'/x]), \dots, \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_n[t'/x])) \\
&\quad \text{pela definição de } \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(\dots)) \\
&= f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(t_n)) \\
&\quad \text{pela hipótese de indução} \\
&= \text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(t) \text{ pela definição de } \text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(f(\dots)) \quad \square
\end{aligned}$$

fol:syn:ext:
prop:ext-formulas

Proposição syn.23. *Seja $\mathfrak{M}$ a estrutura, φ a fórmula, t' um termo, e s uma atribuição de variáveis. Então $\mathfrak{M}, s \models \varphi[t'/x]$ sse $\mathfrak{M}, s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x] \models \varphi$.*

Prova. Exercício. □

Problema syn.9. Prove **Proposição syn.23**

O ponto de **Proposições syn.22** e **syn.23** é o seguinte. Suponha que temos um termo t ou a fórmula φ e algum termo t' , e queremos saber o valor de $t[t'/x]$ ou se $\varphi[t'/x]$ é ou não satisfeita em a estrutura $\mathfrak{M}$ em relação a uma atribuição de variáveis s . Então podemos ou realizar a substituição primeiro e depois considerar o valor ou a satisfação em relação a $\mathfrak{M}$ e s , ou podemos primeiro determinar o valor $m = \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')$ de t' em $\mathfrak{M}$ em relação a s , mudar a atribuição de variáveis para $s[m/x]$ e então considerar o valor de t em $\mathfrak{M}$ e $s[m/x]$, ou se $\mathfrak{M}, s[m/x] \models \varphi$. **Proposições syn.22** e **syn.23** garantem que a resposta será a mesma, independentemente de como o fazamos.

syn.7 Noções Semânticas

fol:syn:sem:
sec

Dada a definição de estruturas para linguagens de primeira ordem, podemos definir algumas propriedades semânticas básicas de sentenças e relações entre elas. A mais simples destas é a noção de *validade* de uma sentença. Uma sentença é válida se é satisfeita em toda estrutura. Sentenças válidas são aquelas que são satisfeitas independentemente de como os símbolos não lógicos nela são interpretados. Sentenças válidas são, portanto, também chamadas de *verdades lógicas*—elas são verdadeiras, isto é, satisfeitas, em qualquer estrutura e, portanto, sua verdade depende apenas dos símbolos lógicos que nelas ocorrem e de sua estrutura sintática, mas não dos símbolos não lógicos ou de sua interpretação.

Definição syn.24 (Validade). Uma sentença φ é *válida*, $\models \varphi$, sse $\mathfrak{M} \models \varphi$ para toda estrutura $\mathfrak{M}$.

Definição syn.25 (Consequência). Uma sentença φ é *consequência* de um conjunto de sentenças Γ , $\Gamma \models \varphi$, sse para toda estrutura $\mathfrak{M}$ com $\mathfrak{M} \models \Gamma$, $\mathfrak{M} \models \varphi$.

Definição syn.26 (Satisfatibilidade). Um conjunto de sentenças Γ é *satisfatível* se $\mathfrak{M} \models \Gamma$ para alguma estrutura $\mathfrak{M}$. Se Γ não é satisfatível ele é chamado de *insatisfatível*.

Proposição syn.27. *Uma sentença φ é válida sse $\Gamma \models \varphi$ para todo conjunto de sentenças Γ .*

Prova. Para a direção direta, seja φ válida, e seja Γ um conjunto de sentenças. Seja $\mathfrak{M}$ a estrutura tal que $\mathfrak{M} \models \Gamma$. Como φ é válida, $\mathfrak{M} \models \varphi$, portanto $\Gamma \models \varphi$.

Para a contrapositiva da direção reversa, seja φ inválida, então há **a estrutura** $\mathfrak{M}$ com $\mathfrak{M} \not\models \varphi$. Quando $\Gamma = \{\top\}$, como $\top$ é válida, $\mathfrak{M} \models \Gamma$. Portanto, há **a estrutura** $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models \Gamma$ mas $\mathfrak{M} \not\models \varphi$, portanto φ não é consequência de Γ . $\square$

Proposição syn.28. $\Gamma \models \varphi$ sse $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfatível.

*fol:syn:sem:
prop:entails-unsat*

Prova. Para a direção direta, suponha $\Gamma \models \varphi$ e suponha, ao contrário, que há **a estrutura** $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Como $\mathfrak{M} \models \Gamma$ e $\Gamma \models \varphi$, $\mathfrak{M} \models \varphi$. Além disso, como $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$, então temos tanto $\mathfrak{M} \models \varphi$ quanto $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$, uma contradição. Portanto, não pode haver tal **estrutura** $\mathfrak{M}$, então $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfatível.

Para a direção reversa, suponha que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é insatisfatível. Então, para toda **estrutura** $\mathfrak{M}$, ou $\mathfrak{M} \not\models \Gamma$ ou $\mathfrak{M} \models \varphi$. Portanto, para toda **estrutura** $\mathfrak{M}$ com $\mathfrak{M} \models \Gamma$, $\mathfrak{M} \models \varphi$, então $\Gamma \models \varphi$. $\square$

Problema syn.10. 1. Mostre que $\Gamma \models \perp$ sse Γ é insatisfatível.

2. Mostre que $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \perp$ sse $\Gamma \models \neg\varphi$.

3. Suponha que c não ocorre em φ nem em Γ . Mostre que $\Gamma \models \forall x \varphi$ sse $\Gamma \models \varphi[c/x]$.

Proposição syn.29. Se $\Gamma \subseteq \Gamma'$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma' \models \varphi$.

Prova. Suponha que $\Gamma \subseteq \Gamma'$ e $\Gamma \models \varphi$. Seja $\mathfrak{M}$ uma estrutura tal que $\mathfrak{M} \models \Gamma'$; então $\mathfrak{M} \models \Gamma$, e como $\Gamma \models \varphi$, obtemos que $\mathfrak{M} \models \varphi$. Portanto, sempre que $\mathfrak{M} \models \Gamma'$, $\mathfrak{M} \models \varphi$, então $\Gamma' \models \varphi$. $\square$

Teorema syn.30 (Teorema da Dedução Semântica). $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ sse $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

*fol:syn:sem:
thm:sem-deduction*

Prova. Para a direção direta, seja $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ e seja $\mathfrak{M}$ **a estrutura** tal que $\mathfrak{M} \models \Gamma$. Se $\mathfrak{M} \models \varphi$, então $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$, então, como ψ é consequência de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, obtemos $\mathfrak{M} \models \psi$. Portanto, $\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi$, então $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Para a direção reversa, seja $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ e $\mathfrak{M}$ **a estrutura** tal que $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$. Então $\mathfrak{M} \models \Gamma$, então $\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi$, e como $\mathfrak{M} \models \varphi$, $\mathfrak{M} \models \psi$. Portanto, sempre que $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$, $\mathfrak{M} \models \psi$, então $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$. $\square$

Proposição syn.31. Seja $\mathfrak{M}$ **a estrutura**, e $\varphi(x)$ **a fórmula** com uma variável livre x , e t um termo fechado. Então:

*fol:syn:sem:
prop:quant-terms*

1. $\varphi(t) \models \exists x \varphi(x)$

2. $\forall x \varphi(x) \models \varphi(t)$

Prova. 1. Suponha $\mathfrak{M} \models \varphi(t)$. Seja s uma atribuição de variáveis com $s(x) = \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$. Então $\mathfrak{M}, s \models \varphi(t)$ já que $\varphi(t)$ é **a sentença**. Por **Proposição syn.23**, $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$. Por **Proposição syn.19**, $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x)$.

2. Suponha $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$. Seja s uma atribuição de variáveis com $s(x) = \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$. Por **Proposição syn.19**, $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$. Por **Proposição syn.23**, $\mathfrak{M}, s \models \varphi(t)$. Por **Proposição syn.18**, $\mathfrak{M} \models \varphi(t)$ já que $\varphi(t)$ é a **sentença**.
 $\square$

Problema syn.11. Complete a prova de **Proposição syn.31**.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas