

## syn.1 Noções Semânticas

fol:syn:sem:  
sec

Dada a definição de **estruturas** para linguagens de primeira ordem, podemos definir algumas propriedades semânticas básicas de sentenças e relações entre elas. A mais simples destas é a noção de *validade* de uma sentença. Uma sentença é válida se é satisfeita em toda **estrutura**. Sentenças válidas são aquelas que são satisfeitas independentemente de como os símbolos não lógicos nela são interpretados. Sentenças válidas são, portanto, também chamadas de *verdades lógicas*—elas são verdadeiras, isto é, satisfeitas, em qualquer **estrutura** e, portanto, sua verdade depende apenas dos símbolos lógicos que nelas ocorrem e de sua **estrutura** sintática, mas não dos símbolos não lógicos ou de sua interpretação.

explanation

**Definição syn.1 (Validade).** Uma sentença  $\varphi$  é *válida*,  $\models \varphi$ , sse  $\mathfrak{M} \models \varphi$  para toda **estrutura**  $\mathfrak{M}$ .

**Definição syn.2 (Consequência).** Uma sentença  $\varphi$  é *consequência* de um conjunto de sentenças  $\Gamma$ ,  $\Gamma \models \varphi$ , sse para toda **estrutura**  $\mathfrak{M}$  com  $\mathfrak{M} \models \Gamma$ ,  $\mathfrak{M} \models \varphi$ .

**Definição syn.3 (Satisfatibilidade).** Um conjunto de sentenças  $\Gamma$  é *satisfatível* se  $\mathfrak{M} \models \Gamma$  para alguma **estrutura**  $\mathfrak{M}$ . Se  $\Gamma$  não é satisfatível ele é chamado de *insatisfatível*.

**Proposição syn.4.** Uma sentença  $\varphi$  é válida sse  $\Gamma \models \varphi$  para todo conjunto de sentenças  $\Gamma$ .

*Prova.* Para a direção direta, seja  $\varphi$  válida, e seja  $\Gamma$  um conjunto de sentenças. Seja  $\mathfrak{M}$  a **estrutura** tal que  $\mathfrak{M} \models \Gamma$ . Como  $\varphi$  é válida,  $\mathfrak{M} \models \varphi$ , portanto  $\Gamma \models \varphi$ .

Para a contrapositiva da direção reversa, seja  $\varphi$  inválida, então há a **estrutura**  $\mathfrak{M}$  com  $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ . Quando  $\Gamma = \{\top\}$ , como  $\top$  é válida,  $\mathfrak{M} \models \Gamma$ . Portanto, há a **estrutura**  $\mathfrak{M}$  tal que  $\mathfrak{M} \models \Gamma$  mas  $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ , portanto  $\varphi$  não é consequência de  $\Gamma$ .  $\square$

fol:syn:sem:  
prop:entails-unsat

**Proposição syn.5.**  $\Gamma \models \varphi$  sse  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  é insatisfatível.

*Prova.* Para a direção direta, suponha  $\Gamma \models \varphi$  e suponha, ao contrário, que há a **estrutura**  $\mathfrak{M}$  tal que  $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ . Como  $\mathfrak{M} \models \Gamma$  e  $\Gamma \models \varphi$ ,  $\mathfrak{M} \models \varphi$ . Além disso, como  $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ,  $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$ , então temos tanto  $\mathfrak{M} \models \varphi$  quanto  $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ , uma contradição. Portanto, não pode haver tal **estrutura**  $\mathfrak{M}$ , então  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  é insatisfatível.

Para a direção reversa, suponha que  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  é insatisfatível. Então, para toda **estrutura**  $\mathfrak{M}$ , ou  $\mathfrak{M} \not\models \Gamma$  ou  $\mathfrak{M} \models \varphi$ . Portanto, para toda **estrutura**  $\mathfrak{M}$  com  $\mathfrak{M} \models \Gamma$ ,  $\mathfrak{M} \models \varphi$ , então  $\Gamma \models \varphi$ .  $\square$

**Problema syn.1.** 1. Mostre que  $\Gamma \models \perp$  sse  $\Gamma$  é insatisfatível.

2. Mostre que  $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \perp$  sse  $\Gamma \models \neg\varphi$ .

3. Suponha que  $c$  não ocorre em  $\varphi$  nem em  $\Gamma$ . Mostre que  $\Gamma \models \forall x \varphi$  sse  $\Gamma \models \varphi[c/x]$ .

**Proposição syn.6.** Se  $\Gamma \subseteq \Gamma'$  e  $\Gamma \models \varphi$ , então  $\Gamma' \models \varphi$ .

*Prova.* Suponha que  $\Gamma \subseteq \Gamma'$  e  $\Gamma \models \varphi$ . Seja  $\mathfrak{M}$  uma estrutura tal que  $\mathfrak{M} \models \Gamma'$ ; então  $\mathfrak{M} \models \Gamma$ , e como  $\Gamma \models \varphi$ , obtemos que  $\mathfrak{M} \models \varphi$ . Portanto, sempre que  $\mathfrak{M} \models \Gamma'$ ,  $\mathfrak{M} \models \varphi$ , então  $\Gamma' \models \varphi$ .  $\square$

**Teorema syn.7 (Teorema da Dedução Semântica).**  $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$  sse  $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ . fol:syn:sem:  
thm:sem-deduction

*Prova.* Para a direção direta, seja  $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$  e seja  $\mathfrak{M}$  a estrutura tal que  $\mathfrak{M} \models \Gamma$ . Se  $\mathfrak{M} \models \varphi$ , então  $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$ , então, como  $\psi$  é consequência de  $\Gamma \cup \{\varphi\}$ , obtemos  $\mathfrak{M} \models \psi$ . Portanto,  $\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ , então  $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ .

Para a direção reversa, seja  $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$  e  $\mathfrak{M}$  a estrutura tal que  $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$ . Então  $\mathfrak{M} \models \Gamma$ , então  $\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ , e como  $\mathfrak{M} \models \varphi$ ,  $\mathfrak{M} \models \psi$ . Portanto, sempre que  $\mathfrak{M} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$ ,  $\mathfrak{M} \models \psi$ , então  $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ .  $\square$

**Proposição syn.8.** Seja  $\mathfrak{M}$  a estrutura, e  $\varphi(x)$  a fórmula com uma variável livre  $x$ , e  $t$  um termo fechado. Então: fol:syn:sem:  
prop:quant-terms

1.  $\varphi(t) \models \exists x \varphi(x)$
2.  $\forall x \varphi(x) \models \varphi(t)$

*Prova.* 1. Suponha  $\mathfrak{M} \models \varphi(t)$ . Seja  $s$  uma atribuição de variáveis com  $s(x) = \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$ . Então  $\mathfrak{M}, s \models \varphi(t)$  já que  $\varphi(t)$  é a sentença. Por ??,  $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$ . Por ??,  $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x)$ .

2. Suponha  $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$ . Seja  $s$  uma atribuição de variáveis com  $s(x) = \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$ . Por ??,  $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$ . Por ??,  $\mathfrak{M}, s \models \varphi(t)$ . Por ??,  $\mathfrak{M} \models \varphi(t)$  já que  $\varphi(t)$  é a sentença.  $\square$

**Problema syn.2.** Complete a prova de **Proposição syn.8**.

## Créditos das Imagens

## Referências Bibliográficas