

syn.1 Satisfação de a Fórmula em a Estrutura

fol:syn:sat:
sec

A noção básica que relaciona expressões como termos e fórmulas, por um lado, e estruturas, por outro, são as de *valor* de um termo e *satisfação* de a fórmula. Informalmente, o *valor* de um termo é um membro de a estrutura—se o termo é apenas uma constante, seu *valor* é o objeto atribuído à constante pela estrutura, e se ele é construído usando símbolos de função, o *valor* é calculado a partir dos valores das constantes e das funções atribuídas às funções no termo. A fórmula é *satisfeita* em a estrutura se a interpretação dada aos predicados torna a fórmula verdadeira no domínio da estrutura. Essa noção de satisfação é especificada indutivamente: a especificação da estrutura afirma diretamente quando fórmulas atômicas são satisfeitas, e definimos quando uma fórmula complexa é satisfeita dependendo do conectivo principal ou quantificador e de se as subfórmulas imediatas são ou não satisfeitas.

explanation

O caso dos quantificadores aqui é um pouco delicado, pois a subfórmula imediata de uma fórmula quantificada tem uma variável livre, e estruturas não especificam os valores das variáveis. Para lidar com essa dificuldade, também introduzimos *atribuições de variáveis* e definimos a satisfação não em relação a a estrutura sozinha, mas em relação a a estrutura mais uma atribuição de variáveis.

Definição syn.1 (Atribuição de Variáveis). Uma atribuição de variáveis s para a estrutura $\mathfrak{M}$ é uma função que mapeia cada variável para um membro de $|\mathfrak{M}|$, isto é, $s: \text{Var} \rightarrow |\mathfrak{M}|$.

A estrutura atribui a valor a cada símbolo de constante, e uma atribuição de variáveis a cada variável. Mas queremos usar termos construídos a partir deles para também nomear membros do domínio. Para isso, definimos o valor dos termos indutivamente. Para símbolos de constante e variáveis, o valor é exatamente como a estrutura ou a atribuição de variáveis o especifica; para termos mais complexos, ele é calculado recursivamente usando as funções que a estrutura atribui aos símbolos de função.

explanation

Definição syn.2 (Valor de Termos). Se t é um termo da linguagem $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M}$ é a estrutura para $\mathcal{L}$, e s é uma atribuição de variáveis para $\mathfrak{M}$, o *valor* $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t)$ é definido como segue:

1. $t \equiv c: \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t) = c^{\mathfrak{M}}.$
2. $t \equiv x: \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t) = s(x).$
3. $t \equiv f(t_1, \dots, t_n):$

$$\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t) = f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_n)).$$

Definição syn.3 (x -Variante). Se s é uma atribuição de variáveis para a estrutura $\mathfrak{M}$, então qualquer atribuição de variáveis s' para $\mathfrak{M}$ que difere de s no máximo no que atribui a x é chamada de x -variante de s . Se s' é uma x -variante de s escrevemos $s' \sim_x s$.

explanation

Note que uma x -variante de uma atribuição s não *precisa* atribuir algo diferente a x . De fato, toda atribuição conta como uma x -variante de si mesma.

Definição syn.4. Se s é uma atribuição de variáveis para a estrutura $\mathfrak{M}$ e $m \in |\mathfrak{M}|$, então a atribuição $s[m/x]$ é a atribuição de variáveis definida por

$$s[m/x](y) = \begin{cases} m & \text{se } y \equiv x \\ s(y) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Em outras palavras, $s[m/x]$ é a x -variante particular de s que atribui o **membro** m do domínio a x , e atribui as mesmas coisas às **variáveis** diferentes de x que s atribui.

Definição syn.5 (Satisfação). A satisfação de a fórmula φ em a estrutura $\mathfrak{M}$ relativamente a uma atribuição de variáveis s , em símbolos: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$, é definida recursivamente como segue. (Escrevemos $\mathfrak{M}, s \not\models \varphi$ para significar “não $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ ”.)

fol:syn:sat:
defn:satisfaction

1. $\varphi \equiv \perp$: $\mathfrak{M}, s \not\models \varphi$.
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$.
3. $\varphi \equiv R(t_1, \dots, t_n)$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\langle \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_n) \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$.
4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1) = \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_2)$.
5. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s \not\models \psi$.
6. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s \models \psi$ e $\mathfrak{M}, s \models \chi$.
7. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s \models \psi$ ou $\mathfrak{M}, s \models \chi$ (ou ambos).
8. $\varphi \equiv (\psi \rightarrow \chi)$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s \not\models \psi$ ou $\mathfrak{M}, s \models \chi$ (ou ambos).
9. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse ou ambos $\mathfrak{M}, s \models \psi$ e $\mathfrak{M}, s \models \chi$, ou nem $\mathfrak{M}, s \models \psi$ nem $\mathfrak{M}, s \models \chi$.
10. $\varphi \equiv \forall x \psi$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse para todo **membro** $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}, s[m/x] \models \psi$.
11. $\varphi \equiv \exists x \psi$: $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse para pelo menos um **membro** $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}, s[m/x] \models \psi$.

explanation

As atribuições de variáveis são importantes nas últimas duas cláusulas. Não podemos definir a satisfação de $\forall x \psi(x)$ por “para todo $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M} \models \psi(m)$ ”. Não podemos definir a satisfação de $\exists x \psi(x)$ por “para pelo menos um $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M} \models \psi(m)$ ”. A razão é que, se $m \in |\mathfrak{M}|$, ele não é um símbolo da linguagem, e portanto $\psi(m)$ não é a fórmula (isto é, $\psi[m/x]$ é indefinido). Também não podemos supor que temos **símbolos de constante** ou termos disponíveis que nomeiem cada **membro** de $\mathfrak{M}$, já que não há nada na definição de **estruturas** que o exija. Na linguagem padrão, o conjunto de **símbolos de constante** é

infinito enumerável, então se $|\mathfrak{M}|$ não é enumerável não há sequer símbolos de constante suficientes para nomear cada objeto.

Resolvemos esse problema introduzindo atribuições de variáveis, que nos permitem ligar variáveis diretamente a membros do domínio. Então, em vez de dizer que, por exemplo, $\exists x \psi(x)$ é satisfeita em $\mathfrak{M}$ sse para pelo menos um $m \in |\mathfrak{M}|$, dizemos que ela é satisfeita em $\mathfrak{M}$ relativamente a s sse $\psi(x)$ é satisfeita relativamente a $s[m/x]$ para pelo menos um $m \in |\mathfrak{M}|$.

Exemplo syn.6. Seja $\mathcal{L} = \{a, b, f, R\}$ onde a e b são símbolos de constante, f é um símbolo de função de dois lugares, e R é um símbolo de predicado de dois lugares. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$ definida por:

1. $|\mathfrak{M}| = \{1, 2, 3, 4\}$
2. $a^{\mathfrak{M}} = 1$
3. $b^{\mathfrak{M}} = 2$
4. $f^{\mathfrak{M}}(x, y) = x + y$ se $x + y \leq 3$ e $= 3$ caso contrário.
5. $R^{\mathfrak{M}} = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}$

A função $s(x) = 1$ que atribui $1 \in |\mathfrak{M}|$ a cada variável é uma atribuição de variáveis para $\mathfrak{M}$.

Então

$$\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(a, b)) = f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(a), \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(b)).$$

Como a e b são símbolos de constante, $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(a) = a^{\mathfrak{M}} = 1$ e $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(b) = b^{\mathfrak{M}} = 2$. Então

$$\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(a, b)) = f^{\mathfrak{M}}(1, 2) = 1 + 2 = 3.$$

Para calcular o valor de $f(f(a, b), a)$ temos que considerar

$$\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(f(a, b), a)) = f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(a, b)), \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(a)) = f^{\mathfrak{M}}(3, 1) = 3,$$

já que $3 + 1 > 3$. Como $s(x) = 1$ e $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(x) = s(x)$, também temos

$$\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(f(a, b), x)) = f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(a, b)), \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(x)) = f^{\mathfrak{M}}(3, 1) = 3,$$

Uma fórmula atômica $R(t_1, t_2)$ é satisfeita se a tupla de valores de seus argumentos, isto é, $\langle \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1), \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_2) \rangle$, é um membro de $R^{\mathfrak{M}}$. Assim, por exemplo, temos $\mathfrak{M}, s \models R(b, f(a, b))$ já que $\langle \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(b), \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(a, b)) \rangle = \langle 2, 3 \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$, mas $\mathfrak{M}, s \not\models R(x, f(a, b))$ já que $\langle 1, 3 \rangle \notin R^{\mathfrak{M}}[s]$.

Para determinar se uma fórmula não atômica φ é satisfeita, aplicam-se as cláusulas da definição indutiva que se aplicam ao conectivo principal. Por exemplo, o conectivo principal em $R(a, a) \rightarrow (R(b, x) \vee R(x, b))$ é o $\rightarrow$, e

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}, s &\models R(a, a) \rightarrow (R(b, x) \vee R(x, b)) \text{ sse} \\ \mathfrak{M}, s &\not\models R(a, a) \text{ ou } \mathfrak{M}, s \models R(b, x) \vee R(x, b)\end{aligned}$$

Como $\mathfrak{M}, s \models R(a, a)$ (porque $\langle 1, 1 \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$) ainda não podemos determinar a resposta e devemos primeiro descobrir se $\mathfrak{M}, s \models R(b, x) \vee R(x, b)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}, s &\models R(b, x) \vee R(x, b) \text{ sse} \\ \mathfrak{M}, s &\models R(b, x) \text{ ou } \mathfrak{M}, s \models R(x, b)\end{aligned}$$

E este é o caso, já que $\mathfrak{M}, s \models R(x, b)$ (porque $\langle 1, 2 \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$).

Lembre-se de que uma x -variante de s é uma atribuição de variáveis que difere de s no máximo no que atribui a x . Para cada **membro** de $|\mathfrak{M}|$, há uma x -variante de s :

$$\begin{aligned}s_1 &= s[1/x], & s_2 &= s[2/x], \\ s_3 &= s[3/x], & s_4 &= s[4/x].\end{aligned}$$

Assim, por exemplo, $s_2(x) = 2$ e $s_2(y) = s(y) = 1$ para todas as variáveis y diferentes de x . Estas são todas as x -variantes de s para a estrutura $\mathfrak{M}$, já que $|\mathfrak{M}| = \{1, 2, 3, 4\}$. Note, em particular, que $s_1 = s$ (s é sempre uma x -variante de si mesma).

Para determinar se uma **fórmula** quantificada existencialmente $\exists x \varphi(x)$ é satisfeita, temos que determinar se $\mathfrak{M}, s[m/x] \models \varphi(x)$ para pelo menos um $m \in |\mathfrak{M}|$. Assim,

$$\mathfrak{M}, s \models \exists x (R(b, x) \vee R(x, b)),$$

já que $\mathfrak{M}, s[1/x] \models R(b, x) \vee R(x, b)$ ($s[3/x]$ também serviria). Mas,

$$\mathfrak{M}, s \not\models \exists x (R(b, x) \wedge R(x, b))$$

já que, qualquer que seja o $m \in |\mathfrak{M}|$ que escolhamos, $\mathfrak{M}, s[m/x] \not\models R(b, x) \wedge R(x, b)$.

Para determinar se uma **fórmula** quantificada universalmente $\forall x \varphi(x)$ é satisfeita, temos que determinar se $\mathfrak{M}, s[m/x] \models \varphi(x)$ para todo $m \in |\mathfrak{M}|$. Assim,

$$\mathfrak{M}, s \models \forall x (R(x, a) \rightarrow R(a, x)),$$

já que $\mathfrak{M}, s[m/x] \models R(x, a) \rightarrow R(a, x)$ para todo $m \in |\mathfrak{M}|$. Para $m = 1$, temos $\mathfrak{M}, s[1/x] \models R(a, x)$ então o conseqüente é verdadeiro; para $m = 2, 3$, e 4 , temos $\mathfrak{M}, s[m/x] \not\models R(x, a)$, então o antecedente é falso. Mas,

$$\mathfrak{M}, s \not\models \forall x (R(a, x) \rightarrow R(x, a))$$

já que $\mathfrak{M}, s[2/x] \not\models R(a, x) \rightarrow R(x, a)$ (porque $\mathfrak{M}, s[2/x] \models R(a, x)$ e $\mathfrak{M}, s[2/x] \not\models R(x, a)$).

Para um caso mais complicado, considere

$$\forall x (R(a, x) \rightarrow \exists y R(x, y)).$$

Como $\mathfrak{M}, s[3/x] \not\models R(a, x)$ e $\mathfrak{M}, s[4/x] \not\models R(a, x)$, os casos interessantes em que temos que nos preocupar com o consequente do condicional são apenas $m = 1$ e $m = 2$. $\mathfrak{M}, s[1/x] \models \exists y R(x, y)$ vale? Vale se há pelo menos um $n \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}, s[1/x][n/y] \models R(x, y)$. De fato, se tomarmos $n = 1$, temos $s[1/x][n/y] = s[1/y] = s$. Como $s(x) = 1$, $s(y) = 1$, e $\langle 1, 1 \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$, a resposta é sim.

Para determinar se $\mathfrak{M}, s[2/x] \models \exists y R(x, y)$, temos que olhar para as atribuições de variáveis $s[2/x][n/y]$. Aqui, para $n = 1$, essa atribuição é $s_2 = s[2/x]$, que não satisfaz $R(x, y)$ ($s_2(x) = 2$, $s_2(y) = 1$, e $\langle 2, 1 \rangle \notin R^{\mathfrak{M}}$). No entanto, considere $s[2/x][3/y] = s_2[3/y]$. $\mathfrak{M}, s_2[3/y] \models R(x, y)$ já que $\langle 2, 3 \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$, e assim $\mathfrak{M}, s_2 \models \exists y R(x, y)$.

Assim, para todo $n \in |\mathfrak{M}|$, ou $\mathfrak{M}, s[m/x] \not\models R(a, x)$ (se $m = 3, 4$) ou $\mathfrak{M}, s[m/x] \models \exists y R(x, y)$ (se $m = 1, 2$), e assim

$$\mathfrak{M}, s \models \forall x (R(a, x) \rightarrow \exists y R(x, y)).$$

Por outro lado,

$$\mathfrak{M}, s \not\models \exists x (R(a, x) \wedge \forall y R(x, y)).$$

Temos $\mathfrak{M}, s[m/x] \models R(a, x)$ apenas para $m = 1$ e $m = 2$. Mas para ambos esses valores de m , há por sua vez um $n \in |\mathfrak{M}|$, a saber $n = 4$, tal que $\mathfrak{M}, s[m/x][n/y] \not\models R(x, y)$ e assim $\mathfrak{M}, s[m/x] \not\models \forall y R(x, y)$ para $m = 1$ e $m = 2$. Em suma, não há $m \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}, s[m/x] \models R(a, x) \wedge \forall y R(x, y)$.

Problema syn.1. Seja $\mathcal{L} = \{c, f, A\}$ com um **símbolo de constante**, um **símbolo de função** de um lugar e um **símbolo de predicado** de dois lugares, e seja a **estrutura** $\mathfrak{M}$ dada por

1. $|\mathfrak{M}| = \{1, 2, 3\}$
2. $c^{\mathfrak{M}} = 3$
3. $f^{\mathfrak{M}}(1) = 2, f^{\mathfrak{M}}(2) = 3, f^{\mathfrak{M}}(3) = 2$
4. $A^{\mathfrak{M}} = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$

(a) Seja $s(v) = 1$ para todas as **variáveis** v . Descubra se

$$\mathfrak{M}, s \models \exists x (A(f(z), c) \rightarrow \forall y (A(y, x) \vee A(f(y), x)))$$

Explique por que sim ou por que não.

(b) Dê uma estrutura e uma atribuição de variáveis diferentes nas quais a **fórmula** não seja satisfeita.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas