

syn.1 Extensionalidade

fol:syn:ext: sec A extensionalidade, às vezes chamada de relevância, pode ser expressa informalmente da seguinte forma: os únicos fatores que influenciam a satisfação de **fórmula** φ em **a estrutura** $\mathfrak{M}$ em relação a uma atribuição de variáveis s são o tamanho do **domínio** e as atribuições feitas por $\mathfrak{M}$ e s aos elementos da linguagem que de fato aparecem em φ . explanation

Uma consequência imediata da extensionalidade é que, quando duas **estruturas** $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$ concordam em todos os elementos da linguagem que aparecem em uma sentença φ e têm o mesmo domínio, $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$ também devem concordar quanto a se φ em si é verdadeira ou não.

fol:syn:ext: prop:extensionality **Proposição syn.1 (Extensionalidade).** *Seja φ **a fórmula**, e $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ **estruturas** com $|\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}_2|$, e s uma atribuição de variáveis sobre $|\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}_2|$. Se $c^{\mathfrak{M}_1} = c^{\mathfrak{M}_2}$, $R^{\mathfrak{M}_1} = R^{\mathfrak{M}_2}$, e $f^{\mathfrak{M}_1} = f^{\mathfrak{M}_2}$ para todo **símbolo de constante** c , **símbolo de relação** R , e **símbolo de função** f que ocorre em φ , então $\mathfrak{M}_1, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}_2, s \models \varphi$.*

Prova. Primeiro prove (por indução sobre t) que, para todo termo, $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}_1}(t) = \text{Val}_s^{\mathfrak{M}_2}(t)$. Então prove a proposição por indução sobre φ , fazendo uso da afirmação que acabamos de provar para a base da indução (onde φ é atômica).□

Problema syn.1. Faça a prova de **Proposição syn.1** em detalhe.

fol:syn:ext: cor:extensionality-sent **Corolário syn.2 (Extensionalidade para Sentenças).** *Seja φ **a sentença** e $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ como em **Proposição syn.1**. Então $\mathfrak{M}_1 \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}_2 \models \varphi$.*

Prova. Segue de **Proposição syn.1** por ??.

Além disso, o valor de um termo, e se **a estrutura** satisfaz ou não **a fórmula**, dependem apenas dos valores de seus subtermos.

fol:syn:ext: prop:ext-terms **Proposição syn.3.** *Seja $\mathfrak{M}$ **a estrutura**, t e t' termos, e s uma atribuição de variáveis. Então $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t[t'/x]) = \text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(t)$.*

Prova. Por indução sobre t .

1. Se t é uma constante, digamos, $t \equiv c$, então $t[t'/x] = c$, e $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(c) = c^{\mathfrak{M}} = \text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(c)$.
2. Se t é uma variável diferente de x , digamos, $t \equiv y$, então $t[t'/x] = y$, e $\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(y) = \text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(y)$ já que $s \sim_x s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]$.
3. Se $t \equiv x$, então $t[t'/x] = t'$. Mas $\text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(x) = \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')$ pela definição de $s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]$.

4. Se $t \equiv f(t_1, \dots, t_n)$ então temos:

$$\begin{aligned}
\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t[t'/x]) &= \\
&= \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(t_1[t'/x], \dots, t_n[t'/x])) \\
&\quad \text{pela definição de } t[t'/x] \\
&= f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_1[t'/x]), \dots, \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t_n[t'/x])) \\
&\quad \text{pela definição de } \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(f(\dots)) \\
&= f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(t_n)) \\
&\quad \text{pela hipótese de indução} \\
&= \text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(t) \text{ pela definição de } \text{Val}_{s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x]}^{\mathfrak{M}}(f(\dots)) \quad \square
\end{aligned}$$

Proposição syn.4. *Seja $\mathfrak{M}$ a estrutura, φ a fórmula, t' um termo, e s uma atribuição de variáveis. Então $\mathfrak{M}, s \models \varphi[t'/x]$ sse $\mathfrak{M}, s[\text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')/x] \models \varphi$.* fol:syn:ext: prop:ext-formulas

Prova. Exercício. □

Problema syn.2. Prove **Proposição syn.4**

explanation O ponto de **Proposições syn.3** e **syn.4** é o seguinte. Suponha que temos um termo t ou a fórmula φ e algum termo t' , e queremos saber o valor de $t[t'/x]$ ou se $\varphi[t'/x]$ é ou não satisfeita em a estrutura $\mathfrak{M}$ em relação a uma atribuição de variáveis s . Então podemos ou realizar a substituição primeiro e depois considerar o valor ou a satisfação em relação a $\mathfrak{M}$ e s , ou podemos primeiro determinar o valor $m = \text{Val}_s^{\mathfrak{M}}(t')$ de t' em $\mathfrak{M}$ em relação a s , mudar a atribuição de variáveis para $s[m/x]$ e então considerar o valor de t em $\mathfrak{M}$ e $s[m/x]$, ou se $\mathfrak{M}, s[m/x] \models \varphi$. **Proposições syn.3** e **syn.4** garantem que a resposta será a mesma, independentemente de como o fazamos.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas