

syn.1 Estruturas Cobertas para Linguagens de Primeira Ordem

fol:syn:cov: Lembre-se de que um termo é *fechado* se não contém *variáveis*.
sec

explanation

Definição syn.1 (Valor de termos fechados). Se t é um termo fechado da linguagem $\mathcal{L}$ e $\mathfrak{M}$ é a estrutura para $\mathcal{L}$, o *valor* $\text{Val}^{\mathfrak{M}}(t)$ é definido como segue:

1. Se t é apenas o símbolo de constante c , então $\text{Val}^{\mathfrak{M}}(c) = c^{\mathfrak{M}}$.
2. Se t é da forma $f(t_1, \dots, t_n)$, então

$$\text{Val}^{\mathfrak{M}}(t) = f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_n)).$$

Definição syn.2 (Estrutura Coberta). A estrutura é *coberta* se todo elemento do domínio é o *valor* de algum termo fechado.

Exemplo syn.3. Seja $\mathcal{L}$ a linguagem com os símbolos de constante *zero*, *um*, *dois*, $\dots$, o símbolo de predicado binário $<$, e os símbolos de função binários $+$ e $\times$. Então a estrutura $\mathfrak{M}$ para $\mathcal{L}$ é aquela com domínio $|\mathfrak{M}| = \{0, 1, 2, \dots\}$ e atribuições $\text{zero}^{\mathfrak{M}} = 0$, $\text{um}^{\mathfrak{M}} = 1$, $\text{dois}^{\mathfrak{M}} = 2$, e assim por diante. Para o símbolo de relação binário $<$, o conjunto $<^{\mathfrak{M}}$ é o conjunto de todos os pares $\langle c_1, c_2 \rangle \in |\mathfrak{M}|^2$ tais que c_1 é menor que c_2 : por exemplo, $\langle 1, 3 \rangle \in <^{\mathfrak{M}}$ mas $\langle 2, 2 \rangle \notin <^{\mathfrak{M}}$. Para o símbolo de função binário $+$, defina $+^{\mathfrak{M}}$ da maneira usual—por exemplo, $+^{\mathfrak{M}}(2, 3)$ resulta em 5, e analogamente para o símbolo de função binário $\times$. Portanto, o *valor* de *quatro* é apenas 4, e o *valor* de $\times(\text{dois}, +(\text{tres}, \text{zero}))$ (ou em notação infixa, $\text{dois} \times (\text{tres} + \text{zero})$) é

$$\begin{aligned} \text{Val}^{\mathfrak{M}}(\times(\text{dois}, +(\text{tres}, \text{zero}))) &= \\ &= \times^{\mathfrak{M}}(\text{Val}^{\mathfrak{M}}(\text{dois}), \text{Val}^{\mathfrak{M}}(+(\text{tres}, \text{zero}))) \\ &= \times^{\mathfrak{M}}(\text{Val}^{\mathfrak{M}}(\text{dois}), +^{\mathfrak{M}}(\text{Val}^{\mathfrak{M}}(\text{tres}), \text{Val}^{\mathfrak{M}}(\text{zero}))) \\ &= \times^{\mathfrak{M}}(\text{dois}^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}(\text{tres}^{\mathfrak{M}}, \text{zero}^{\mathfrak{M}})) \\ &= \times^{\mathfrak{M}}(2, +^{\mathfrak{M}}(3, 0)) \\ &= \times^{\mathfrak{M}}(2, 3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Problema syn.1. $\mathfrak{N}$, o modelo padrão da aritmética, é coberto? Explique.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas