

syn.1 Atribuições de Variáveis

fol:syn:ass: sec Uma atribuição de variáveis s fornece um valor para *toda* variável—e há infinitas delas. Isso, é claro, não é necessário. Exigimos que as atribuições de variáveis atribuam valores a todas as **variáveis** simplesmente porque isso torna as coisas muito mais fáceis. O valor de um termo t , e se **a fórmula** φ é satisfeita em **a estrutura** com respeito a s , dependem apenas das atribuições que s faz às **variáveis** em t e às **variáveis** livres de φ . Esse é o conteúdo das próximas duas proposições. Para tornar precisa a ideia de “depende de”, mostramos que quaisquer duas atribuições de variáveis que concordam em todas as variáveis em t dão o mesmo valor, e que φ é satisfeita relativamente a uma sse é satisfeita relativamente à outra se duas atribuições de variáveis concordam em todas as variáveis livres de φ . explanation

fol:syn:ass: prop:valindep **Proposição syn.1.** *Se as **variáveis** em um termo t estão entre $x_1, \dots, x_n$, e $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ para $i = 1, \dots, n$, então $\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t) = \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t)$.*

Prova. Por indução sobre a complexidade de t . Para o caso base, t pode ser **a símbolo de constante** ou uma das variáveis $x_1, \dots, x_n$. Se $t = c$, então $\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t) = c^{\mathfrak{M}} = \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t)$. Se $t = x_i$, $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ pela hipótese da proposição, e assim $\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t) = s_1(x_i) = s_2(x_i) = \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t)$.

Para o passo indutivo, suponha que $t = f(t_1, \dots, t_k)$ e que a afirmação vale para $t_1, \dots, t_k$. Então

$$\begin{aligned} \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t) &= \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(f(t_1, \dots, t_k)) \\ &= f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_k)). \end{aligned}$$

Para $j = 1, \dots, k$, as **variáveis** de t_j estão entre $x_1, \dots, x_n$. Pela hipótese de indução, $\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_j) = \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_j)$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t) &= \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(f(t_1, \dots, t_k)) \\ &= f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_k)) \\ &= f^{\mathfrak{M}}(\text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_k)) \\ &= \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(f(t_1, \dots, t_k)) = \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t). \quad \square \end{aligned}$$

fol:syn:ass: prop:satindep **Proposição syn.2.** *Se as **variáveis** livres em φ estão entre $x_1, \dots, x_n$, e $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ para $i = 1, \dots, n$, então $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.*

Prova. Usamos indução sobre a complexidade de φ . Para o caso base, onde φ é atômica, φ pode ser: $\top$, $\perp$, $R(t_1, \dots, t_k)$ para um predicado R de k lugares e termos $t_1, \dots, t_k$, ou $t_1 = t_2$ para termos t_1 e t_2 . Nos dois últimos casos, demonstramos apenas a direção direta do **bicondicional**, já que a prova da recíproca é simétrica.

1. $\varphi \equiv \top$: tanto $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$ quanto $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.

2. $\varphi \equiv \perp$: tanto $\mathfrak{M}, s_1 \not\models \varphi$ quanto $\mathfrak{M}, s_2 \not\models \varphi$.

3. $\varphi \equiv R(t_1, \dots, t_k)$: seja $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$. Então

$$\langle \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_k) \rangle \in R^{\mathfrak{M}}.$$

Para $i = 1, \dots, k$, $\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_i) = \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_i)$ por **Proposição syn.1**. Então também temos $\langle \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_1), \dots, \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_k) \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$, e portanto $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.

4. $\varphi \equiv t_1 = t_2$: suponha $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$. Então $\text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_1) = \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_1) &= \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_1) && \text{(por Proposição syn.1)} \\ &= \text{Val}_{s_1}^{\mathfrak{M}}(t_2) && \text{(já que } \mathfrak{M}, s_1 \models t_1 = t_2 \text{)} \\ &= \text{Val}_{s_2}^{\mathfrak{M}}(t_2) && \text{(por Proposição syn.1),} \end{aligned}$$

então $\mathfrak{M}, s_2 \models t_1 = t_2$.

Agora suponha $\mathfrak{M}, s_1 \models \psi$ sse $\mathfrak{M}, s_2 \models \psi$ para todas as fórmulas ψ menos complexas que φ . O passo de indução procede por casos determinados pelo operador principal de φ . Em cada caso, demonstramos apenas a direção direta do **bicondicional**; a prova da direção reversa é simétrica. Em todos os casos exceto os dos quantificadores, aplicamos a hipótese de indução às sub-fórmulas ψ de φ . As variáveis livres de ψ estão entre as de φ . Assim, se s_1 e s_2 concordam nas variáveis livres de φ , elas também concordam nas de ψ , e a hipótese de indução se aplica a ψ .

1. $\varphi \equiv \neg\psi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$, então $\mathfrak{M}, s_1 \not\models \psi$, então pela hipótese de indução, $\mathfrak{M}, s_2 \not\models \psi$, portanto $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.
2. $\varphi \equiv \psi \wedge \chi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$, então $\mathfrak{M}, s_1 \models \psi$ e $\mathfrak{M}, s_1 \models \chi$, então pela hipótese de indução, $\mathfrak{M}, s_2 \models \psi$ e $\mathfrak{M}, s_2 \models \chi$. Portanto, $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.
3. $\varphi \equiv \psi \vee \chi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$, então $\mathfrak{M}, s_1 \models \psi$ ou $\mathfrak{M}, s_1 \models \chi$. Pela hipótese de indução, $\mathfrak{M}, s_2 \models \psi$ ou $\mathfrak{M}, s_2 \models \chi$, então $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.
4. $\varphi \equiv \psi \rightarrow \chi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$, então $\mathfrak{M}, s_1 \not\models \psi$ ou $\mathfrak{M}, s_1 \models \chi$. Pela hipótese de indução, $\mathfrak{M}, s_2 \not\models \psi$ ou $\mathfrak{M}, s_2 \models \chi$, então $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.
5. $\varphi \equiv \psi \leftrightarrow \chi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$, então ou $\mathfrak{M}, s_1 \models \psi$ e $\mathfrak{M}, s_1 \models \chi$, ou $\mathfrak{M}, s_1 \not\models \psi$ e $\mathfrak{M}, s_1 \not\models \chi$. Pela hipótese de indução, ou $\mathfrak{M}, s_2 \models \psi$ e $\mathfrak{M}, s_2 \models \chi$ ou $\mathfrak{M}, s_2 \not\models \psi$ e $\mathfrak{M}, s_2 \not\models \chi$. Em qualquer caso, $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.
6. $\varphi \equiv \exists x \psi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$, há um $m \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}, s_1[m/x] \models \psi$. Sejam $s'_1 = s_1[m/x]$ e $s'_2 = s_2[m/x]$. As variáveis livres de ψ estão entre $x_1, \dots, x_n$, e x . $s'_1(x_i) = s'_2(x_i)$, já que s'_1 e s'_2 são x -variantes de s_1 e s_2 , respectivamente, e por hipótese $s_1(x_i) = s_2(x_i)$. $s'_1(x) = s'_2(x) = m$ pela forma como definimos s'_1 e s'_2 . Então a hipótese de indução se aplica a ψ e s'_1, s'_2 , então $\mathfrak{M}, s'_2 \models \psi$. Portanto, já que $s'_2 = s_2[m/x]$, há um $m \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}, s_2[m/x] \models \psi$, e assim $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.

7. $\varphi \equiv \forall x \psi$: se $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$, então para todo $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}, s_1[m/x] \models \psi$. Queremos mostrar que também, para todo $m \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}, s_2[m/x] \models \psi$. Então seja $m \in |\mathfrak{M}|$ arbitrário, e considere $s'_1 = s_1[m/x]$ e $s'_2 = s_2[m/x]$. Temos que $\mathfrak{M}, s'_1 \models \psi$. As variáveis livres de ψ estão entre $x_1, \dots, x_n$, e x . $s'_1(x_i) = s'_2(x_i)$, já que s'_1 e s'_2 são x -variantes de s_1 e s_2 , respectivamente, e por hipótese $s_1(x_i) = s_2(x_i)$. $s'_1(x) = s'_2(x) = m$ pela forma como definimos s'_1 e s'_2 . Então a hipótese de indução se aplica a ψ e s'_1, s'_2 , e temos $\mathfrak{M}, s'_2 \models \psi$. Isso se aplica a todo $m \in |\mathfrak{M}|$, isto é, $\mathfrak{M}, s_2[m/x] \models \psi$ para todo $m \in |\mathfrak{M}|$, então $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$.

Por indução, obtemos que $\mathfrak{M}, s_1 \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s_2 \models \varphi$ sempre que as variáveis livres em φ estão entre $x_1, \dots, x_n$ e $s_1(x_i) = s_2(x_i)$ para $i = 1, \dots, n$. $\square$

Problema syn.1. Complete a prova de **Proposição syn.2**.

Sentenças não têm variáveis livres, então quaisquer duas atribuições de variáveis atribuem as mesmas coisas a todas as (zero) variáveis livres de qualquer sentença. A proposição que acabamos de provar significa, então, que se **a sentença** é satisfeita ou não em uma estrutura relativamente a uma atribuição de variáveis é completamente independente da atribuição. Registraremos esse fato. Ele justifica a definição de satisfação de **a sentença** em **a estrutura** (sem mencionar uma atribuição de variáveis) que segue. explanation

fol:syn:ass: **Corolário syn.3.** Se φ é **a sentença** e s uma atribuição de variáveis, então $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s' \models \varphi$ para toda atribuição de variáveis s' . cor:sat-sentence

Prova. Seja s' uma atribuição de variáveis qualquer. Como φ é **a sentença**, ela não tem variáveis livres, e assim toda atribuição de variáveis s' trivialmente atribui as mesmas coisas a todas as variáveis livres de φ que faz s . Então a condição de **Proposição syn.2** é satisfeita, e temos $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s' \models \varphi$. $\square$

fol:syn:ass: **Definição syn.4.** Se φ é **a sentença**, dizemos que **a estrutura** $\mathfrak{M}$ *satisfaz* φ , $\mathfrak{M} \models \varphi$, sse $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ para todas as atribuições de variáveis s . defn:satisfaction

Se $\mathfrak{M} \models \varphi$, também dizemos simplesmente que φ é *verdadeira em* $\mathfrak{M}$. A noção de satisfação se estende naturalmente de **sentenças** individuais para conjuntos de **sentenças**.

fol:syn:ass: **Definição syn.5.** Se Γ é um conjunto de **sentenças** Γ , dizemos que **a estrutura** $\mathfrak{M}$ *satisfaz* Γ , $\mathfrak{M} \models \Gamma$, sse $\mathfrak{M} \models \varphi$ para todo $\varphi \in \Gamma$. defn:sat

fol:syn:ass: **Proposição syn.6.** Seja $\mathfrak{M}$ **a estrutura**, φ **a sentença**, e s uma atribuição de variáveis. $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}, s \models \varphi$. prop:sentence-sat-true

Prova. Exercício. $\square$

Problema syn.2. Prove **Proposição syn.6**

Proposição syn.7. Suponha que $\varphi(x)$ contém apenas x livre, e $\mathfrak{M}$ é a estrutura. Então: fol:syn:ass:
prop:sat-quant

1. $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x)$ sse $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$ para pelo menos uma atribuição de variáveis s .
2. $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$ sse $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$ para todas as atribuições de variáveis s .

Prova. Exercício. □

Problema syn.3. Prove Proposição syn.7.

Problema syn.4. Suponha que $\mathcal{L}$ é uma linguagem sem símbolos de função. Dada uma estrutura $\mathfrak{M}$, c a símbolo de constante e $a \in |\mathfrak{M}|$, defina $\mathfrak{M}[a/c]$ como a estrutura que é exatamente como $\mathfrak{M}$, exceto que $c^{\mathfrak{M}[a/c]} = a$. Defina $\mathfrak{M} \models \varphi$ para sentenças φ por:

1. $\varphi \equiv \perp$: não $\mathfrak{M} \models \varphi$.
2. $\varphi \equiv \top$: $\mathfrak{M} \models \varphi$.
3. $\varphi \equiv R(d_1, \dots, d_n)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse $\langle d_1^{\mathfrak{M}}, \dots, d_n^{\mathfrak{M}} \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$.
4. $\varphi \equiv d_1 = d_2$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse $d_1^{\mathfrak{M}} = d_2^{\mathfrak{M}}$.
5. $\varphi \equiv \neg\psi$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse não $\mathfrak{M} \models \psi$.
6. $\varphi \equiv (\psi \wedge \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse $\mathfrak{M} \models \psi$ e $\mathfrak{M} \models \chi$.
7. $\varphi \equiv (\psi \vee \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse $\mathfrak{M} \models \psi$ ou $\mathfrak{M} \models \chi$ (ou ambos).
8. $\varphi \equiv (\psi \rightarrow \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse não $\mathfrak{M} \models \psi$ ou $\mathfrak{M} \models \chi$ (ou ambos).
9. $\varphi \equiv (\psi \leftrightarrow \chi)$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse ou ambos $\mathfrak{M} \models \psi$ e $\mathfrak{M} \models \chi$, ou nem $\mathfrak{M} \models \psi$ nem $\mathfrak{M} \models \chi$.
10. $\varphi \equiv \forall x \psi$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse para todo $a \in |\mathfrak{M}|$, $\mathfrak{M}[a/c] \models \psi[c/x]$, se c não ocorre em ψ .
11. $\varphi \equiv \exists x \psi$: $\mathfrak{M} \models \varphi$ sse há um $a \in |\mathfrak{M}|$ tal que $\mathfrak{M}[a/c] \models \psi[c/x]$, se c não ocorre em ψ .

Sejam $x_1, \dots, x_n$ todas as variáveis livres em φ , $c_1, \dots, c_n$ símbolos de constante não presentes em φ , $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{M}|$, e $s(x_i) = a_i$.

Mostre que $\mathfrak{M}, s \models \varphi$ sse $\mathfrak{M}[a_1/c_1, \dots, a_n/c_n] \models \varphi[c_1/x_1] \dots [c_n/x_n]$.

(Este problema mostra que é possível dar uma semântica para a lógica de primeira ordem que dispensa atribuições de variáveis.)

Problema syn.5. Suponha que f é um símbolo de função não presente em $\varphi(x, y)$. Mostre que há a estrutura $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M} \models \forall x \exists y \varphi(x, y)$ sse há uma $\mathfrak{M}'$ tal que $\mathfrak{M}' \models \forall x \varphi(x, f(x))$.

(Este problema é um caso especial do que é conhecido como Teorema de Skolem; $\forall x \varphi(x, f(x))$ é chamado de forma normal de Skolem de $\forall x \exists y \varphi(x, y)$.)

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas