

seq.1 Correção

fol:seq:sou:
sec

Um sistema de **derivação**, tal como o cálculo de seqüentes, é *correto* se não pode derivar coisas que de fato não valem. A correção é, assim, uma espécie de propriedade de segurança garantida para sistemas de **derivação**. Dependendo de qual propriedade da teoria da prova está em questão, gostaríamos de saber, por exemplo, que

explanation

1. todo φ **derivável** é válido;
2. se a **sentença** é **derivável** de algumas outras, ela também é consequência delas;
3. se um conjunto de **sentenças** é inconsistente, ele é insatisfatível.

Essas são propriedades importantes de um sistema de **derivação**. Se alguma delas não vale, o sistema de **derivação** é deficiente—ele **deriva** demais. Consequentemente, estabelecer a correção de um sistema de **derivação** é da máxima importância.

Como todas essas propriedades da teoria da prova são definidas via **derivabilidade** no cálculo de seqüentes de certos seqüentes, provar (1)–(3) acima requer provar algo sobre as propriedades semânticas dos seqüentes **deriváveis**. Primeiro definiremos o que significa um seqüente ser *válido*, e então mostraremos que todo seqüente **derivável** é válido. (1)–(3) seguem-se então como corolários desse resultado.

Definição seq.1. A **estrutura** $\mathfrak{M}$ *satisfaz* um seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ se, e somente se, ou $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ para algum $\varphi \in \Gamma$ ou $\mathfrak{M} \models \varphi$ para algum $\varphi \in \Delta$.

Um seqüente é *válido* se, e somente se, toda **estrutura** $\mathfrak{M}$ o satisfaz.

fol:seq:sou:

thm:sequent-soundness

Teorema seq.2 (Correção). Se **LK** **deriva** $\Theta \Rightarrow \Xi$, então $\Theta \Rightarrow \Xi$ é válido.

Prova. Seja π a **derivação** de $\Theta \Rightarrow \Xi$. Procedemos por indução sobre o número de inferências n em π .

Se o número de inferências é 0, então π consiste apenas em um seqüente inicial. Todo seqüente inicial $\varphi \Rightarrow \varphi$ é obviamente válido, pois para toda $\mathfrak{M}$, ou $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ ou $\mathfrak{M} \models \varphi$.

Se o número de inferências é maior que 0, distinguimos casos de acordo com o tipo da inferência mais inferior. Pela hipótese de indução, podemos supor que as premissas dessa inferência são válidas, já que o número de inferências na **derivação** de qualquer premissa é menor que n .

Primeiro, consideramos as inferências possíveis com apenas uma premissa.

1. A última inferência é um enfraquecimento. Então $\Theta \Rightarrow \Xi$ é $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ (se a última inferência é WL) ou $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ (se é WR), e a **derivação** termina em uma de

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta \end{array}}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \text{WL} \qquad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta \end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \text{WR}$$

Pela hipótese de indução, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é válido, isto é, para toda **estrutura** $\mathfrak{M}$, ou há algum $\chi \in \Gamma$ tal que $\mathfrak{M} \not\models \chi$ ou há algum $\chi \in \Delta$ tal que $\mathfrak{M} \models \chi$.

Se $\mathfrak{M} \not\models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, então $\chi \in \Theta$ também, já que $\Theta = \varphi, \Gamma$, e assim $\mathfrak{M} \not\models \chi$ para algum $\chi \in \Theta$. Analogamente, se $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$, como $\chi \in \Xi$, $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Xi$. Consequentemente, $\Theta \Rightarrow \Xi$ é válido.

2. A última inferência é $\neg$ L: Então a premissa da última inferência é $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ e a conclusão é $\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, isto é, a **derivação** termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \end{array}}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \neg\text{L}$$

e $\Theta = \neg\varphi, \Gamma$ enquanto $\Xi = \Delta$.

A hipótese de indução nos diz que $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido, isto é, para toda $\mathfrak{M}$, ou (a) para algum $\chi \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \not\models \chi$, ou (b) para algum $\chi \in \Delta$, $\mathfrak{M} \models \chi$, ou (c) $\mathfrak{M} \models \varphi$. Queremos mostrar que $\Theta \Rightarrow \Xi$ também é válido. Seja $\mathfrak{M}$ a **estrutura**. Se (a) vale, então há $\chi \in \Gamma$ tal que $\mathfrak{M} \not\models \chi$, mas $\chi \in \Theta$ também. Se (b) vale, há $\chi \in \Delta$ tal que $\mathfrak{M} \models \chi$, mas $\chi \in \Xi$ também. Por fim, se $\mathfrak{M} \models \varphi$, então $\mathfrak{M} \not\models \neg\varphi$. Como $\neg\varphi \in \Theta$, há $\chi \in \Theta$ tal que $\mathfrak{M} \not\models \chi$. Consequentemente, $\Theta \Rightarrow \Xi$ é válido.

3. A última inferência é $\neg$ R: Exercício.
4. A última inferência é $\wedge$ L: Há duas variantes: $\varphi \wedge \psi$ pode ser inferido à esquerda a partir de φ ou de ψ no lado esquerdo da premissa. No primeiro caso, π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \end{array}}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \wedge\text{L}$$

e $\Theta = \varphi \wedge \psi, \Gamma$ enquanto $\Xi = \Delta$. Considere a **estrutura** $\mathfrak{M}$. Como, pela hipótese de indução, $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ é válido, (a) $\mathfrak{M} \not\models \varphi$, (b) $\mathfrak{M} \not\models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (c) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$. No caso (a), $\mathfrak{M} \not\models \varphi \wedge \psi$, então há $\chi \in \Theta$ (a saber, $\varphi \wedge \psi$) tal que $\mathfrak{M} \not\models \chi$. No caso (b), há $\chi \in \Gamma$

tal que $\mathfrak{M} \models \chi$, e $\chi \in \Theta$ também. No caso (c), há $\chi \in \Delta$ tal que $\mathfrak{M} \models \chi$, e $\chi \in \Xi$ também, já que $\Xi = \Delta$. Assim, em cada caso, $\mathfrak{M}$ satisfaz $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. Como $\mathfrak{M}$ era arbitrário, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é válido. O caso em que $\varphi \wedge \psi$ é inferido a partir de ψ é tratado da mesma forma, mudando φ para ψ .

5. A última inferência é $\vee R$: Há duas variantes: $\varphi \vee \psi$ pode ser inferido à direita a partir de φ ou de ψ no lado direito da premissa. No primeiro caso, π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \vee R$$

Agora $\Theta = \Gamma$ e $\Xi = \Delta, \varphi \vee \psi$. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. Como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido, (a) $\mathfrak{M} \models \varphi$, (b) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (c) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$. No caso (a), $\mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi$. No caso (b), há $\chi \in \Gamma$ tal que $\mathfrak{M} \models \chi$. No caso (c), há $\chi \in \Delta$ tal que $\mathfrak{M} \models \chi$. Assim, em cada caso, $\mathfrak{M}$ satisfaz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi$, isto é, $\Theta \Rightarrow \Xi$. Como $\mathfrak{M}$ era arbitrário, $\Theta \Rightarrow \Xi$ é válido. O caso em que $\varphi \vee \psi$ é inferido a partir de ψ é tratado da mesma forma, mudando φ para ψ .

6. A última inferência é $\rightarrow R$: Então π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \rightarrow R$$

Novamente, a hipótese de indução diz que a premissa é válida; queremos mostrar que a conclusão também é válida. Seja $\mathfrak{M}$ arbitrário. Como $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ é válido, ao menos um dos seguintes casos ocorre: (a) $\mathfrak{M} \models \varphi$, (b) $\mathfrak{M} \models \psi$, (c) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (d) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$. Nos casos (a) e (b), $\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ e assim há um $\chi \in \Delta, \varphi \rightarrow \psi$ tal que $\mathfrak{M} \models \chi$. No caso (c), para algum $\chi \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \models \chi$. No caso (d), para algum $\chi \in \Delta$, $\mathfrak{M} \models \chi$. Em cada caso, $\mathfrak{M}$ satisfaz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$. Como $\mathfrak{M}$ era arbitrário, $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi$ é válido.

7. A última inferência é $\forall L$: Então há a fórmula $\varphi(x)$ e um termo fechado t tais que π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta \end{array}}{\forall x \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta} \forall L$$

Queremos mostrar que a conclusão $\forall x \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$ é válida. Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. Como a premissa $\varphi(t), \Gamma \Rightarrow \Delta$ é válida, (a) $\mathfrak{M} \models \varphi(t)$, (b) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (c) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$. No caso (a), por ??, se $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$, então $\mathfrak{M} \models \varphi(t)$. Como $\mathfrak{M} \models \varphi(t)$, $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$. Nos casos (b) e (c), $\mathfrak{M}$ também satisfaz $\forall x \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$. Como $\mathfrak{M}$ era arbitrário, $\forall x \varphi(x), \Gamma \Rightarrow \Delta$ é válido.

8. A última inferência é $\exists R$: Exercício.
9. A última inferência é $\forall R$: Então há a fórmula $\varphi(x)$ e a símbolo de constante a tais que π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(a) \end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \varphi(x)} \forall R$$

em que a condição de variável própria é satisfeita, isto é, a não ocorre em $\varphi(x)$, Γ ou Δ . Pela hipótese de indução, a premissa da última inferência é válida. Temos de mostrar que a conclusão também é válida, isto é, que para qualquer estrutura $\mathfrak{M}$, (a) $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$, (b) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Gamma$, ou (c) $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$.

Suponha que $\mathfrak{M}$ seja a estrutura arbitrária. Se (b) ou (c) vale, terminamos, então suponha que nenhuma vale: para todo $\chi \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \not\models \chi$, e para todo $\chi \in \Delta$, $\mathfrak{M} \not\models \chi$. Temos de mostrar que (a) vale, isto é, $\mathfrak{M} \models \forall x \varphi(x)$. Por ??, basta mostrar que $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$ para toda atribuição de variáveis s . Então seja s uma atribuição de variáveis arbitrária. Considere a estrutura $\mathfrak{M}'$ que é exatamente como $\mathfrak{M}$ exceto que $a^{\mathfrak{M}'} = s(x)$. Por ??, para qualquer $\chi \in \Gamma$, $\mathfrak{M}' \models \chi$ já que a não ocorre em Γ , e para qualquer $\chi \in \Delta$, $\mathfrak{M}' \not\models \chi$. Mas a premissa é válida, então $\mathfrak{M}' \models \varphi(a)$. Por ??, $\mathfrak{M}', s \models \varphi(a)$, já que $\varphi(a)$ é uma sentença. Agora $s \sim_x s$ com $s(x) = \text{Val}_s^{\mathfrak{M}'}(a)$, já que definimos $\mathfrak{M}'$ exatamente desse modo. Assim ?? se aplica, e obtemos $\mathfrak{M}', s \models \varphi(x)$. Como a não ocorre em $\varphi(x)$, por ??, $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$. Como s era arbitrário, completamos a prova de que $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$ para toda atribuição de variáveis.

10. A última inferência é $\exists L$: Exercício.

Agora consideremos as inferências possíveis com duas premissas.

1. A última inferência é um corte: então π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \varphi, \Pi \Rightarrow \Lambda \end{array}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda} \text{Cut}$$

Seja $\mathfrak{M}$ a estrutura. Pela hipótese de indução, as premissas são válidas, então $\mathfrak{M}$ satisfaz ambas as premissas. Distinguimos dois casos: (a) $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ e (b) $\mathfrak{M} \models \varphi$. No caso (a), para que $\mathfrak{M}$ satisfaça a premissa esquerda, ela deve satisfazer $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Mas então também satisfaz a conclusão. No caso (b), para que $\mathfrak{M}$ satisfaça a premissa direita, ela deve satisfazer $\Pi \setminus \Delta$. Novamente, $\mathfrak{M}$ satisfaz a conclusão.

2. A última inferência é $\wedge R$. Então π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \wedge R$$

Considere a estrutura $\mathfrak{M}$. Se $\mathfrak{M}$ satisfaz $\Gamma \Rightarrow \Delta$, terminamos. Então suponha que não. Como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido pela hipótese de indução, $\mathfrak{M} \models \varphi$. Analogamente, como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ é válido, $\mathfrak{M} \models \psi$. Mas então $\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \psi$.

3. A última inferência é $\vee L$: Exercício.

4. A última inferência é $\rightarrow L$. Então π termina em

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \psi, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda} \rightarrow L$$

Novamente, considere a estrutura $\mathfrak{M}$ e suponha que $\mathfrak{M}$ não satisfaça $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$. Temos de mostrar que $\mathfrak{M} \not\models \varphi \rightarrow \psi$. Se $\mathfrak{M}$ não satisfaz $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$, não satisfaz nem $\Gamma \Rightarrow \Delta$ nem $\Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$. Como $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ é válido, temos $\mathfrak{M} \models \varphi$. Como $\psi, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda$ é válido, temos $\mathfrak{M} \not\models \psi$. Mas então $\mathfrak{M} \not\models \varphi \rightarrow \psi$, que é o que queríamos mostrar. $\square$

Problema seq.1. Complete a prova de Teorema seq.2.

fol:seq:sou: cor:weak-soundness **Corolário seq.3.** Se $\vdash \varphi$, então φ é válido.

fol:seq:sou: cor:entailment-soundness **Corolário seq.4.** Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \models \varphi$.

Prova. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então, para algum subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, há a derivação de $\Gamma_0 \Rightarrow \varphi$. Por Teorema seq.2, toda estrutura $\mathfrak{M}$ ou torna algum $\psi \in \Gamma_0$ falso ou torna φ verdadeiro. Logo, se $\mathfrak{M} \models \Gamma$, então também $\mathfrak{M} \models \varphi$. $\square$

fol:seq:sou: cor:consistency-soundness **Corolário seq.5.** Se Γ é satisfatível, então é consistente.

Prova. Provamos a contrapositiva. Suponha que Γ não seja consistente. Então há um $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito e a derivação de $\Gamma_0 \Rightarrow$. Por Teorema seq.2, $\Gamma_0 \Rightarrow$ é válido. Em outras palavras, para toda estrutura $\mathfrak{M}$, há $\chi \in \Gamma_0$ tal que $\mathfrak{M} \models \chi$, e como $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, esse χ também está em Γ . Assim, nenhuma $\mathfrak{M}$ satisfaz Γ , e Γ não é satisfatível. $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas