

seq.1 Correção com Predicado de identidade

fol:seq:sid:
sec

Proposição seq.1. LK com sequentes iniciais e regras para a identidade é correto.

Prova. Sequentes iniciais da forma $\Rightarrow t = t$ são válidos, pois para toda **estrutura** $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \models t = t$. (Note que supomos que o termo t seja fechado, isto é, que não contenha variáveis, de modo que atribuições de variáveis são irrelevantes).

Suponha que a última inferência em **a derivação** seja $=$. Então a premissa é $t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_1)$ e a conclusão é $t_1 = t_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi(t_2)$. Considere **a estrutura** $\mathfrak{M}$. Precisamos mostrar que a conclusão é válida, isto é, se $\mathfrak{M} \models t_1 = t_2$ e $\mathfrak{M} \models \Gamma$, então ou $\mathfrak{M} \models \chi$ para algum $\chi \in \Delta$ ou $\mathfrak{M} \models \varphi(t_2)$.

Pela hipótese de indução, a premissa é válida. Isso significa que, se $\mathfrak{M} \models t_1 = t_2$ e $\mathfrak{M} \models \Gamma$, então ou (a) para algum $\chi \in \Delta$, $\mathfrak{M} \models \chi$, ou (b) $\mathfrak{M} \models \varphi(t_1)$. No caso (a), terminamos. Considere o caso (b). Seja s uma atribuição de variáveis com $s(x) = \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1)$. Por ??, $\mathfrak{M}, s \models \varphi(t_1)$. Como $s \sim_x s$, por ??, $\mathfrak{M}, s \models \varphi(x)$. Como $\mathfrak{M} \models t_1 = t_2$, temos $\text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_1) = \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$, e portanto $s(x) = \text{Val}^{\mathfrak{M}}(t_2)$. Aplicando ?? novamente, temos também $\mathfrak{M}, s \models \varphi(t_2)$. Por ??, $\mathfrak{M} \models \varphi(t_2)$. $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas